基于GeoGebra的立体几何深度教学案例研究*

——以与球有关的切、接、截问题为例

程泽兵，秦　红，李　雷，邓　城（广东省广州市增城区增城中学）
赖黎明（广东省广州市增城区教师发展中心）

摘　要：立体几何中与球有关的切、接、截问题对学生的直观想象素养要求较高，历来是教学中的一大难点。为了突破这一难点，教学中运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能，可以画出立体几何图形，帮助学生直观感知立体图形中点、线、面之间的位置关系，为学生理解立体几何问题搭建“脚手架”，打造生动、活泼的数学课堂，提高课堂教学的实效性，提升学生的核心素养。

关键词：GeoGebra；球；直观想象；深度教学；核心素养
文章编号：1002-2171(2022)8-0074-05

1　问题提出

纵观高考数学全国卷，我们可以发现，与球有关的立体几何试题都有一定的难度，尤其是切、接、截问题具有较高的抽象性，对学生的直观想象素养要求更高，因此，这类问题历来是教学中的一大难点。

如何在教学中突破这一难点？如何在立体几何教学中落实对学生“直观想象”核心素养的培养？《普通高中数学课程标准（2017 年版）》明确指出：“注重信息技术与数学课程内容的深度融合，提高教学的实效性”[1]，为我们指明了方向。

GeoGebra 是一款具有强大功能的数学软件，它实现了“形”与“数”的完美融合，代数运算系统的完美嵌入为数学探究提供无限可能，指令输入与工具构造

的培养。

2.5　课例点评，成果分享

数学建模与实际生活息息相关，精心设计的课程可以有效地转变学生的学习态度，培养学生的数学核心素养，能让学生掌握数学建模的一般思路与方法，更好地用数学方法解决生活中的实际问题。

通过本课例的教学，验证了小组合作式探究教学可以有效提高学生的学习兴趣，有利于加快中学数学教师的专业发展。分享成果和经验的同时为一线教师提供可借鉴、可推广的教学设计思路。阐述了开展传帮带，指导青年教师进行教学设计对基础教育高质量发展具有深远的意义。

3　反思

教师专业发展应理论与实践相结合，紧紧围绕核心素养，落实“四基”，培养“四能”，做好教学设计。教师要不断探索和创新，为新课程实施设置合适的教学情境，引导学生会学数学，养成良好的思维习惯，激发学生的求知欲。

中学数学教师在专业发展过程中，要时刻进行批判性思维，不断总结与反思自己的教学实践，提高教学能力。通过与骨干教师的交流、校本课程研修，取长补短、不断创新，提高自己的实践能力、分析能力，形成适合自己的教学风格，满足可持续发展的教学需求。

中学数学教师应与时俱进，敢于发挥自身的内驱力，改变落后的教学观念。积极推进教学改革，敢于创新，加快专业发展步伐，提高教学水平，为国家培养合格的创新型人才，满足时代和社会的需要。通过本次传帮带指导教学设计，促进了青年教师的专业发展。

参考文献：

[1]　中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[M]．北京：人民教育出版社，2020.
[2]　教育部师范教育司．教师专业化的理论与实践（修订版）[M]．北京：人民教育出版社，2003.
[3]　李佳．中学数学教师专业发展研究[D]．西安：陕西师范大学，2014.

让动态演示过程更加生动，GeoGebra 带给我们的不仅是方便快捷的数学，更是理想的深度学习平台与深度教学工具[2]。运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能，可以画出立体几何图形，帮助学生直观感知立体图形中点、线、面之间的位置关系。

近年来，广州市程泽兵名师工作室在开展“基于 GeoGebra 的高中数学立体几何应用研究”的课题研究过程中，充分运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能进行深度教学，为学生的立体几何学习打开了一扇明亮的窗户，取得了良好的教学效果。

2 案例研究

案例 1 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的三条棱 PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=2$，M，N 分别为该三棱锥的内切球与外接球上的动点，求 M，N 两点间距离的最小值。

案例分析：

(1)基本经验。

设三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的内切球与外接球的球心分别为 O_1，O_2。内切球与平面 ABC 的切点为 H，学生不难获得以下几点基本活动经验：

①把三棱锥 $P\text{-}ABC$ 补成正方体 $PADB\text{-}CA_1D_1B_1$；

②在正方体中，$PD_1\perp$平面 ABC，令 G 为 AB 中点，则 PD_1 与 CG 的交点即为内切球与平面 ABC 的切点 H(图 1)；

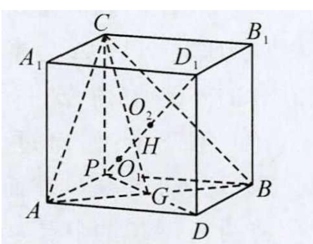

图 1

③PD_1 的中点即为外接球球心 O_2；

④O_1，O_2，H 三点均在正方体的体对角线 PD_1 上。

(2)学习障碍。

不少学生在获得以上基本认识后，解题活动就不能再深入下去了。所遇到的困难主要有以下两点：

①图难画。在补形之后，涉及球的切、接问题，并且出现两个球体，图形里的元素较多，很难画出直观图形，因此难以想象出这些元素之间的位置关系及数量关系。

②双动点。由于题目中出现了两个动点，而且两个动点又是处在不同的球面上。因此，在什么状况下两个动点之间距离最小，学生无法想象，不知从何下手。

(3)直观感知。

运用数学软件 GeoGebra 能够轻松作出 3D 图形，通过用鼠标拖动 3D 图形变换图形位置，引导学生从各个不同的视角观察图形，从而直观感知到 M，N 两个动点处在什么位置时，它们之间的距离达到最小。

具体操作步骤如下：

第 1 步：将三棱锥 $P\text{-}ABC$ 补成正方体 $PADB\text{-}CA_1D_1B_1$；

第 2 步：以对角线 PD_1 的中点 O_2 为球心，以 PO_2 为半径作出正方体外接球球 O_2；

第 3 步：作出三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的内切球球 O_1；

第 4 步：创建球 O_1 与球 O_2 上的动点 M，N，创建线段 MN；

第 5 步：用鼠标拖动图形，慢慢变换图形位置，让学生从多个不同的视角仔细观察图形，就能直观地感受到，当 M，N 处在正方体的对角线 PD_1 与球 O_1 和球 O_2 的球面的两个交点 L，P 时，M，N 两点之间的距离最小(如图 2)。

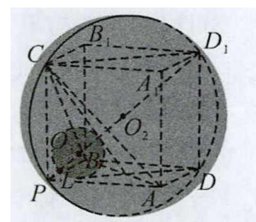

图 2

(4)深度探究。

借助 GeoGebra 的 3D 功能，我们可以直观发现，当 M，N 两个动点处在 L，P 两点的位置时，它们之间的距离最小。

但是，直观不能代替证明，因此，我们将就“为什么 M，N 处在 L，P 两点的位置时它们之间的距离最小”进行深度探究。

对该问题的探究将分为两步。

首先，证明一个引理。

引理：已知 O_1 是半径为 R 的球 O_2 内的一个定点，N 为球 O_2 的球面上的动点，过 O_1，O_2 的直线交球 O_2 的球面于 P，D_1 两点，则点 N 到定点 O_1 距离的最小值为线段 PO_1 的长，最大值为线段 D_1O_1 的长(截面图如图 3)。

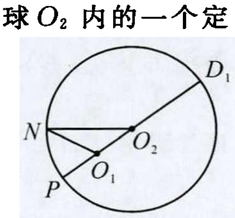

图 3

证明：联结 NO_1，NO_2（显然 $NO_2>O_1O_2$），则 $NO_2-O_1O_2\leqslant NO_1$，而 $NO_2=PO_2=R$。

而 $NO_2-O_1O_2=PO_2-O_1O_2=PO_1$，所以 $PO_1\leqslant NO_1$，当且仅当 N 与 P 重合时“=”成立。

由点 N 的任意性可知，PO_1 的长即为球面上动点 N 与球内定点 O_1 之间距离的最小值。

然后，再证明案例 1 中为什么当 M，N 两个动点

分别处于 L,P 的位置时，它们之间的距离最小。

因为球 O_1 内含于球 O_2，且 O_1,O_2 均在正方体的体对角线 PD_1 上，对角线 PD_1 与球 O_1 的球面交于 H,L 两点，M,N 分别为球 O_1 与球 O_2 的球面上的两个动点。联结 NO_1,MO_1,MN（图 4）。

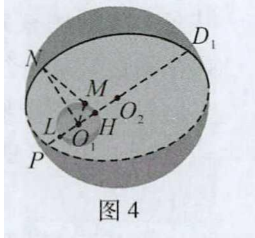

图 4

则不论 M,N 的位置如何，总有 $MN\geqslant NO_1-MO_1$， ①

当且仅当 M,N,O_1 三点共线且 M 在 O_1N 之间时"＝"成立。

又 O_1 是球 O_2 内的定点，由引理可知 $NO_1\geqslant PO_1$， ②

当且仅当 N 与 P 重合时"＝"成立。

因此，由①，②可知，$MN\geqslant NO_1-MO_1\geqslant PO_1-MO_1=PO_1-LO_1=PL$， ③

当且仅当①式和②式的"＝"同时成立时，③式中的"＝"成立，即 M,N 分别位于 L,P 时，M,N 两点间距离的最小值即为线段 PL 的长。

(5)运算求解。

有了上述的直观感知与深度理解后，学生就可以不需要借助于 GeoGebra 也能作出正方体的对角面 PDD_1C 与球 O_1、球 O_2 的截面图（图 5），从而将立体图形的有关计算转化为平面图形的计算。

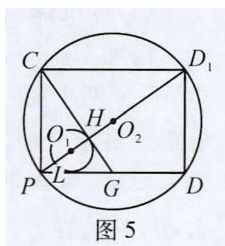

图 5

在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，由体积分割法，可求得三棱锥内切球半径 $R=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$。在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，由等积法 $V_{P\text{-}ABC}=V_{C\text{-}PAB}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PH=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot PC$，解得 $PH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。再由图 5 可知，$PL=PH-2R=\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$，即 M,N 两点之间的距离最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$。

案例 2 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中（图 6），$AB=4$，E 为 BB_1 的中点，过 AE 作该正方体外接球的截面，求所得截面圆面积的最小值。

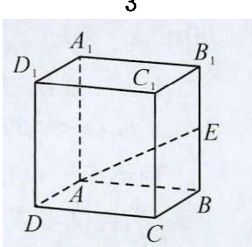

图 6

案例分析：

(1)基本经验。

这是一道关于求球的截面面积的最值问题，学生一般都有以下几点基本认识：

①过 AE 的截面有无数个；

②过 AE 与正方体外接球的截面都是圆；

③正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 外接球球心为正方体体对角线的中点。

(2)学习障碍。

在获得以上 3 点基本认识后，学生遇到的主要困难在于：

①难以画出过 AE 的截面圆；

②难以想象截面圆圆心的位置以及截面圆与正方体相关元素之间的联系；

③难以想象在何种情况下截面圆的半径最小。

而对于教师而言，最大的困难也在于难以手工画出直观的图形，因而很难向学生解释清楚在什么情况下截面圆的面积最小，大有"只能意会，不能言传"的感觉。

(3)探究发现。

为了突破上述难点，我们可以运用 GeoGebra 作出 3D 动态图形，利用鼠标变换图形的位置，帮助学生观察图形并运用类比思想，引导学生发现截面圆在什么情况下面积最小。具体操作步骤如下：

第 1 步：以对角线 AC_1 的中点 O 为球心，以 OA 为半径创建正方体的外接球（图 7）；

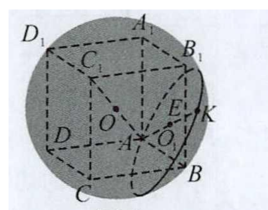

图 7

第 2 步：作出过 AE 的截面圆，记 AE 与球 O 球面的另一个交点为 K，AK 的中点为 O_1；

第 3 步：用鼠标拖动截面圆，观察发现，当截面圆以 AE 所在的弦 AK 为直径时，截面圆 $\odot O_1$ 的面积最小（图 8）。

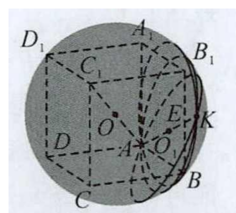

图 8

(4)深度探究。

直观不能代替证明，为什么以 AE 所在弦 AK 为直径的截面圆的面积最小呢？

对此，我们可以运用类比的思想方法，从圆的相关性质中获得灵感。

我们知道，过半径为 r 的 $\odot O$ 内的定点 P 的所有弦中，当弦 AB 与 OP 垂直时，弦长最短（图 9）。

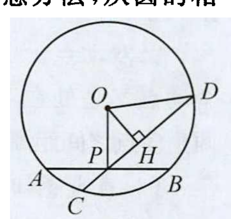

图 9

证明：过点 P 任作一条异于

AB 的弦 CD，过 O 作 $OH\perp CD$，垂足为 H。

由垂径定理知 H 为 CD 的中点。

联结 OD，则 $|CD|=2|HD|=2\sqrt{|OD|^2-|OH|^2}=2\sqrt{r^2-|OH|^2}$。

又 $|AB|=2|AP|=2\sqrt{r^2-|OP|^2}$，因为在 $\mathrm{Rt}\triangle OPH$ 中，$|OP|>|OH|$，所以 $\sqrt{r^2-|OP|^2}<\sqrt{r^2-|OH|^2}$，即 $|AB|<|CD|$。

所以，由弦 CD 的任意性可知 $|AB|$ 最小。

类比上述圆的性质，我们可以猜想：球 O 中过定直线 AE 的平面与正方体外接球的所有截面中以 AE 所在弦 AK 为直径的圆的面积最小。

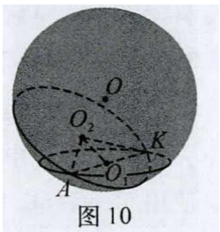

图 10

证明：在球 O 中作出以 AE 所在弦 AK 为直径的截面圆 $\odot O_1$，再过 AK 任作一个截面圆 $\odot O_2$（图 10）。

联结 AO_2，KO_2，O_1O_2，因为 O_1 为 AK 的中点，所以在 $\odot O_2$ 中，由垂径定理知 $O_1O_2\perp AK$。

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AO_1O_2$ 中，总有 $AO_2>AO_1$，即 $\odot O_2$ 的半径总大于 $\odot O_1$ 的半径，由 $\odot O_2$ 的任意性可知 $\odot O_1$ 的半径最小。

因此，以 AK 为直径的截面圆的面积最小。

（5）运算求解。

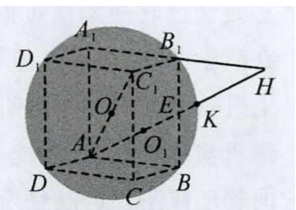

图 11

延长 AE 交球 O 的球面于点 K，交 A_1B_1 的延长线于点 H（图 11），AK 的中点为 O_1，则由前面的探究发现可知，以 AK 为直径的截面圆 $\odot O_1$ 的面积最小。

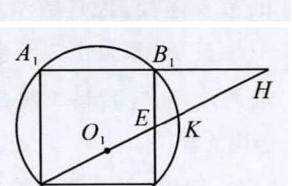

图 12

为了方便求截面圆 $\odot O_1$ 的半径，我们可以运用GeoGebra创建平面视图的功能，将过 ABB_1A_1 的平面与球 O 的截面抽出来单独分析（图 12）。

因为 $A_1B_1=4$，且 E 为 BB_1 的中点，所以 B_1E 为 $\triangle A_1HA$ 的中位线。

故 $B_1H=A_1B_1=4$。

所以 $HA=\sqrt{AA_1^2+A_1H^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$。

由割线定理知 $HB_1\cdot HA_1=HK\cdot HA$，所以 $HK=\dfrac{HB_1\cdot HA_1}{HA}=\dfrac{4\times 8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$。

因此 $AK=HA-HK=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$。

所以 $AO_1=\dfrac{AK}{2}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$。

故过 AE 的截面圆的最小面积为 $\pi\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{36\pi}{5}$。

案例3　两个半径为 3 的球和两个半径为 2 的球，它们两两外切，并且都内切于另一个大球，求大球的半径。

案例分析：

（1）基本经验。

设两个半径为 3 的球的球心分别为 O_1，O_2，两个半径为 2 的球的球心分别为 O_3，O_4，大球球心为 O，大球半径为 R，由学生的基本活动经验不难得到以下几点基本认识：

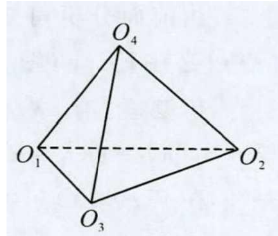

图 13

①O_1，O_2，O_3，O_4 构成一个四面体（图 13）；

②$O_1O_2=6$，$O_3O_4=4$，$O_1O_4=O_2O_4=O_1O_3=O_2O_3=5$；

③$OO_1=OO_2=R-3$，$OO_3=OO_4=R-2$。

（2）学习障碍。

本题球的个数较多，共有 5 个球，学生虽然有上述基本经验，但远远不足以解答本题。在本题中，学生最大的学习障碍有以下两点：

①5 个球之间有外切，有内切，情况复杂，难以画出这 5 个球的直观图；

②无法想象、确定大球球心 O 的位置。

（3）探索发现。

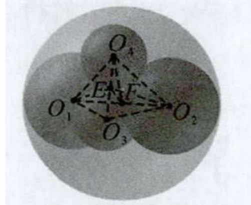
图 14

运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能，可以轻松作出这 5 个球的直观图（图 14），操作步骤略。

设 O_1O_2 的中点为 F，O_3O_4 的中点为 E，联结 O_1E，O_2E，O_3F，O_4F，EF（图 15）。

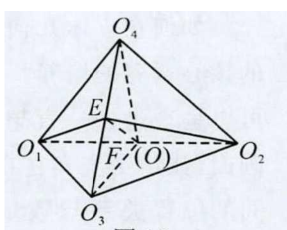

图 15

因为 $OO_1=OO_2$，所以大球球心 O 在线段 O_1O_2 的中垂面 O_3O_4F 上。

又 $OO_3=OO_4$，所以大球球心 O 在线段 O_3O_4 的中垂面

O_1O_2E 上。

故大球球心 O 必在两个中垂面的交线 EF 上，进一步可以发现，点 F 即为大球球心 O。

因为球 O_1 与球 O 内切，所以 $O_1F=R-3$。

又 $O_1F=3$，所以 $R=6$，此时 $FO_2=R-3=3$，$FO_3=FO_4=R-2=4$，符合条件。

所以球 O_1、球 O_2、球 O_3、球 O_4 恰好都与以 F 为球心，以 6 为半径的大球内切。

（4）深度探究。

通过 GeoGebra 的 3D 动态图形辅助，我们探索发现了线段 O_1O_2 的中点 F 即为大球球心，但这仅仅只是猜想验证，我们还可以结合 3D 图形进行深度思考，通过演绎推理探寻到大球球心的位置为什么就是 F 点。

由前面分析可知，大球球心 O 必在 EF 上（图 16）。

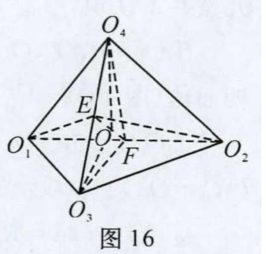

图 16

依题意，有 $OO_1=OO_2=R-3$，$OO_3=OO_4=R-2$。

在 Rt$\triangle OO_2F$ 中，$OF=\sqrt{OO_2^2-O_2F^2}=\sqrt{(R-3)^2-9}$，

在 Rt$\triangle OO_4E$ 中，$OE=\sqrt{OO_4^2-O_4E^2}=\sqrt{(R-2)^2-4}$。

因为 $O_4F=O_3F=4$，$O_4E=\frac{1}{2}O_3O_4=2$，所以在 Rt$\triangle O_4EF$ 中，$EF=\sqrt{O_4F^2-O_4E^2}=2\sqrt{3}$。

又因为 $OE+OF=EF=2\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{(R-2)^2-4}+\sqrt{(R-3)^2-9}=2\sqrt{3}$。

化简整理得 $11R^2-60R-36=0$，即 $(11R+6)\cdot(R-6)=0$，解得 $R=6$。

此时 $OF=\sqrt{(R-3)^2-9}=0$，所以大球球心 O 与点 F 重合，即点 F 为大球球心，大球半径为 6。

3 教学感悟

3.1 提升素养

如何在立体几何教学中落实对学生“直观想象”的核心素养的培养？运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能可以呈现过去一直想呈现而又无法呈现的立体图形画面，让学生实实在在地感知到空间图形中各元素之间的位置关系与数量关系。3D 动态图形的效果呈现，为学生理解问题搭建“脚手架”[3]，为打造生动、活泼的数学课堂创造了条件，激发了学生的学习兴趣，提高了他们课堂的学习效率。学生的“直观想象”核心素养正是在这种直观、动态、潜移默化的过程中悄然提升。

3.2 培养创新意识

学生在平时的作业与考试中，不可能也不允许使用 GeoGebra 等数学软件，但在学生遇到学习障碍并百思不得其解时，教师运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能辅助教学，帮助学生进行深度思考，一方面可以激发学生学习立体几何的兴趣，帮助学生进行深度思考。另一方面可以培养学生运用信息技术手段进行科学探究的科研意识和创新精神。

3.3 “用”是为了“不用”

教学中运用 GeoGebra 的 3D 绘图功能帮助学生克服学习过程中的障碍，目的是让学生逐步过渡到不使用 GeoGebra 的动态功能，也能想象到几何体中各元素之间的位置关系与相互联系，最终达到“无为而治”的最高境界。这也是“直观想象”核心素养得到提升的一个重要标志。

3.4 直观不能代替证明

运用 GeoGebra 辅助立体几何教学，最明显的优势是通过软件操作可以发现规律并提出猜想。但是在教学中，不能仅仅停留在软件操作与猜想上，更要上升到演绎推理与证明的层次上，只有将实验归纳与逻辑演绎相结合，才能真正发挥 GeoGebra 在教学中的辅助作用。这既是学生“直观想象”核心素养提升的重要途径，也是数学严谨性的必然要求。

说明：本文中 3 个案例的课件均有动画演示，可扫描二维码观看（图 17）。

图 17

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018.

[2] 罗建宇．从融合到创新：基于 GeoGebra 的深度教学[J]．数学通报，2020，59(2)：23-26.

[3] 李雷，程泽兵．基于 GeoGebra 的立体几何问题探究[J]．中学数学研究，2021(12)：17-19.

＊本文系广东省教育研究院教育研究立项课题——“基于 GeoGebra 的高中数学立体几何应用研究”（课题编号 GD-JY-2020-A-s102）的阶段性成果之一。