新教材中分层随机抽样内容的比较研究*

广东省广州市第十六中学 (510080) 何嘉颖

摘要 分层随机抽样是一种常见的抽样方法, 也是高中数学要求学生掌握的一种抽样方法. 随着《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》的发布, 对分层随机抽样的要求也有所变化. 本文将会对新教材中分层随机抽样的内容进行比较研究, 并从分层随机抽样的定义、均值、方差等方面理清其中的联系与区别, 为分层随机抽样这块内容的教学提供一定的教学建议.

关键词 分层随机抽样; 平均数; 方差; 无偏估计

1 分层随机抽样定义的比较研究

1.1 几个课本定义的异同

对比旧人教 A 版、新人教 A 版、新人教 B 版以及旧北师大版、新北师大版五个版本教材中分层随机抽样的定义, 可以发现五个不同教材的分层随机抽样的定义都有涵盖两个与分层随机抽样相关的特点: 一是把总体分为互不相交的层, 二是在每层中进行随机抽样.

其中, 新人教 A 版与其他四个课本定义有明显区别. 一是四个课本定义中都对进行分层随机抽样时各层应如何抽样作了说明, 即对每层抽样时除了要进行随机抽样, 还强调需要 “按一定比例” 进行抽样. 二是新人教 B 版还具体描述了 “按一定比例” 进行抽样的具体操作, 即 “按层在总体中所占比例” 进行抽样. 三是新人教 A 版没有对各层应如何抽样作说明, 但提及了一个分层随机抽样时的分配方式 “比例分配”.

从教材的内容来看, 其他四个课本定义中所强调的 “按一定比例” 进行抽样都是指 “比例分配”. 也就是说, 新人教 A 版是一个包含其他四个课本定义内涵的更广义上的分层随机抽样定义, 即分层随机抽样对各层的抽样方式有多种, “比例分配” 是其中一种方式. 新人教 A 版所给出的分层随机抽

3.5 教学环节五: 课堂小结

深度学习蕴含着理解、总结和反思的过程. 所以最后课堂小结设置问题: “这节课你学习了什么? ” 接着教师追问: “回顾本节课的学习过程, 我们从总结基本图形—应用基本图形, 从中你有什么体会? ” 让学生畅所欲言, 从知识和方法上进行多角度的总结和梳理.

3.6 教学环节六: 教学反馈

为了检测这节课达到的教学效果, 在本次课教学结束后, 针对练习中学生做的较差的一道练习, 对学生再一次进行检测. 这节习题课所考察学生的各项综合能力和素养都比较强, 主要是面向中上学生. 通过微专题学习之后, 我们发现中上的学生的思维都有一定的提升. 在这次检测中, 他们大部分都能够运用本节课的学习方法解决此类问题, 达到了本节课的教学目标. 对于班级的后进生, 他们对于这种题目也有了一定的解题思路, 虽然没能够完全解决此类型题目, 但是相比较之前练习时没有任何的思路, 现在也能写出一些, 说明已经初步形成这种思维.

4 结语

初中数学课堂进行微专题教学时, 教师要尝试采取多种教学方式吸引学生的注意力, 例如通过数学实验、几何画板、变式训练和问题导向式等教学策略, 提高学生参与课堂的兴趣和主动探索问题的能力. 同时在教学的过程中有意识地向学生渗透建模、转化、整体和方程等多种数学思想, 提升学生的数学核心素养, 从而让学生达到深度学习的目的.

参考文献

[1] 伍晓焰, 李平. 深度学习视角下习题课的设计与实践—以 “解一元一次方程的习题课” 为例 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学) , 2021(7) : 36-39.

[2] 周玉俊, 赵军. 深度学习视角下初中数学微专题教学的实践与反思 [J]. 江苏教育. 2021, (80) : 34-37.

[3] 杨光. 核心素养视域下初中数学深度学习的培养探析 [J]. 数学学习与研究. 2021, (23) : 96-97.

[4] 张阳. 见 “微” 知著 聚 “沙” 成塔——基于深度学习的微专题教学 [J]. 中学教研: 数学. 2020, (5) : 11-14.

[5] 欧佩雯. 基于深度学习的初中数学教学设计研究—以《一元二次方程》为例 [J]. 明日, 2021(5) : 1.

[6] 赵小花, 胡永强. 构建 “手拉手” 模型 探究问题的本质——以一节 “全等三角形” 复习课为例 [J]. 上海中学数学. 2019, (Z1) : 92-95.

*广州市普通高中数学新课程实施立项课题——基于高中数学新课标对教材的新增内容合理性和可行性研究 (课题批准号: GZSX2021031) 研究成果.

样定义与大学教材中的定义一致, 除“比例分配”(按层权分配) 外, 分层随机抽样还有 Neyman 分配 (按层权与层标准差的乘积成正比分配) 、最优分配 (按估计量方差达到最小分配) 、不按比例分配等. 分层随机抽样的本质是按照一定的方式得到更能反映总体, 更能反映实际的样本.

1.2 新人教 A 版定义下的教学

《普通高中数学课程标准 (实验版) 》和旧教材对分层随机抽样的要求不高, 分层随机抽样的概念是“比例分配”下分层随机抽样定义, 主要是让学生掌握比例分配下各层样本量与总体的关系, 学会进行比例的换算.《普通高中数学课程标准 (2017 年版) 》对分层随机抽样的要求有所提高, 包括增加了分层随机抽样的样本均值和样本方差, 但侧重点仍在“比例分配”下的分层随机抽样.

新人教 A 版除了增加了均值和方差计算外, 其对分层随机抽样定义本身的要求也有所强化. 即需要知道分配方式有多种, 按不同分配方式可以得到不同的样本, 且这些样本的获得均是可行的; 需要区别按比例分配与其他分配方式下样本均值与方差估计总体的意义.

新课程标准和新人教 A 版对分层随机抽样的要求转变对教师的教学以及学生有关分层随机抽样的学习提出了新的要求. 教师需重视对新课程标准与新教材的研究与学习, 改变自己对分层随机抽样的固有看法. 除了补充有关分层随机抽样的样本均值和样本方差外, 还需要着重理解不同分配方式下样本的关系以及这对样本均值和样本方差估计总体的影响.

以下提供简单两个例子用于理解不按比例分配分层抽样的现实意义.

例 1 某大学有男生 2000 人, 女生 3000 人, 本月举办了一个人数为 500 人的交友配对活动 (一男一女为一对) , 参加该活动的男女生各 250 人. 活动结束后对 500 人进行了问卷回访; 并以此估计全校学生对举办该类活动的认可情况.

在该例中, 由于是“一男一女的配对活动”, 因此样本无法实现按比例分配.

例 2 某学生正进行某项针对全校学生的、与性别相关的研究性学习, 需对全校进行问卷调查. 该生通过自己的朋友圈进行问卷发布, 受该生朋友圈扩散限制, 回收的问卷共 100 份, 其中男生 10 份, 女生 90 份. 全校男生 600 人, 女生 400 人. 受研究截止时间限制, 该生只能对已回收的 100 份问卷进行数据分析, 并以此估计全校学生的情况.

在该例中, 样本与总体并非按比例分配, 且总体中男生人数多于女生人数, 但样本男生人数少于女生人数, 因此用该样本估计总体会有较大误差; 但在现实中受各方面因素所限, 常会出现该例的情况. 教师可利用此例让学生理解它的现实意义, 并引导学生思考如何优化方案以及方案是否合理性, 如扩大样本量, 剔除女生样本或增加男生样本以达到比例分配等.

2 分层随机抽样均值的比较研究

2.1 分层随机抽样样本均值估计总体的意义

从分层随机抽样样本均值和总体均值的计算公式看, 对分层随机抽样的均值计算是对各层平均数进行加权平均数; 其中权重为各层个体数在总个体数的占比.

由于新人教 B 版和新北师大版两版教材对分层随机抽样的定义局限于“比例分配”, 因此所给出的样本平均数可直接估计总体平均数, 即两版教材并没有过多探究分层随机抽样样本均值估计总体的意义, 而只侧重于公式的计算.

新人教 A 版中分层随机抽样定义包括了“按比例分配”和“不按比例分配”两种, 因此均值计算涉及许多相关量, 且与分层随机抽样有关的均值也有多个, 包括总体的均值、总体中各层的均值、样本的均值、样本中各层的均值, 如以层数为 2 为例, 涉及 6 个均值计算. 在这 6 个均值计算中, 只要分配方式确定, 都可以相应计算出各自的均值; 并且由分层随机抽样的定义, 各层的样本均值都可以估计对应层的总体均值. 而问题的核心在于总样本的均值并不一定可以估计总体的均值; 对大多数的分配方式, 总体的均值是对各层样本平均数进行加权平均, 而权重为各层总个体数在总个体数的占比; 只有在“按比例分配”下, 总体均值恰好可用总样本均值进行估计.

例 (新人教 A 版第 184 页练习 3) [1] 高二年级有男生 490 人, 女生 510 人, 张华按男生、女生进行分层, 通过分层随机抽样, 得到男生、女生的平均身高分别为 170.2cm 和 160.8cm.

(1) 如果张华在各层中按比例分配样本, 总样本量为 100, 那么在男生、女生中分别抽取了多少名? 在这种情况下, 请估计高二年级全体学生的平均身高;

(2) 如果张华从男生、女生中抽取的样本量分别为 30 和 70, 那么在这种情况下, 如何估计高二年级全体学生的平均身高更合理?

分析 (1) 中明确指出这是按比例分配样本, 因此对全体学生平均身高的计算既可以使用 $\overline{W}=\dfrac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N}$, 也可以使用 $\overline{W}=\overline{w}$. (2) 中所给男生和女生的样本量明显不是比例分配样本, 因此对全体学生平均身高的计算只可以使用 $\overline{W}=\dfrac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N}\approx 165.406$, 若使用 $\overline{w}$ 估计 $\overline{W}$, 则

$\overline{w} \approx 163.62$, 此时会出现较大误差.

2.2 新人教 A 版分层随机抽样均值下的教学

对比三个版本对分层随机抽样均值的介绍, 都有体现分层随机抽样下样本均值计算的公式推导, 以及用它对总体均值的估计. 在教学中, 对样本均值公式的推导、其中涉及的多个相关量的关系的梳理以及样本均值公式的意义都是教学的重点. 此外, 针对新人教 A 版分层随机抽样均值, 除了对样本均值公式本身的推导以及意义的解释外, 应说明只要知道各层样本量, 都可以计算样本的均值, 只是所得均值并不一定能用于估计总体均值; 应说明总体均值计算公式与一般情况下分层随机抽样均值计算公式的关系, 即可以用 $\dfrac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N}$ 来估计总体均值 $\overline{W}$; 应说明在按比例分配下总体均值计算公式与分层随机抽样均值计算公式的关系, 即可以直接用样本均值估计总体均值.

教师在教学中, 可注重分层随机抽样均值计算公式的推导并在推导过程中加入对公式含义的理解; 可以给出不同形式的例子以便学生在熟悉均值计算公式的计算; 还可以结合实际情境来判断计算所得均值是否能更合理反映总体的情况. 如对 "新人教 A 版第 184 页练习 3" 进行改编, 给出例子中 1000 位学生的身高数据; 给出某种分层随机抽样下样本的身高数据, 让学生进行计算与探究.

值得注意的是, 在用分层抽样的样本均值估计总体均值时, 无论是按比例分配还是不按比例分配的情况, 对各层总体均值都默认可用各层样本均值进行估计. 即默认简单随机抽样中样本均值可估计总体均值; 对这一性质, 课本在简单随机抽样一节仅以 "在简单随机抽样中, 我们常用样本平均数去估计总体平均数" 说明, 但没有阐述本质原因. 实际上, 这一性质涉及统计学中点估计的无偏性, 即 "对任意总体而言, 样本均值是总体均值的无偏估计". 但对学生而言, 这一性质超出了课程标准的要求范围, 因此没有进行阐述而是作为一个默认性质给到学生. 但教师在教学中需要理解这一性质的原理, 以及 "样本方差并不是总体方差的无偏估计", 以便理解教材在对分层抽样方差的阐述中不类比均值来阐述的原因.

3 分层随机抽样方差的比较研究

3.1 分层随机抽样方差的定义

在新北师大版教材中, 以一实际例子 (新北师大版必修第一册 P171 例 6) 出发, 给出了层数为 2 时样本方差的计算过程, 并抽象概括出方差的一般计算公式以及推导过程.

在新人教 B 版教材中, 以一实际例子 (新人教 B 版必修第二册 P79) 出发, 直接给出了层数为 2 时样本方差的计算公式, 但并没有给出公式的推导过程; 还给出了样本方差的变形公式.

在新人教 A 版教材中, 以一实际例子 (新人教 A 版必修第二册 P212 例 6) 出发, 给出了层数为 2 时样本方差的推导过程, 但没有抽象概括出一般计算公式; 在新人教 A 版 P216 的习题 9.2 第十一题给出了在分层随机抽样中, 层数分为 3 层时样本方差的一般计算公式.

在各个版本教材中都只给出了样本方差的计算公式, 并直接用该样本方差直接估计总体方差; 而没有给出总体方差的计算公式, 以及在不同分配方式特别是按比例分配下的样本方差与总体方差的联系. 这与样本方差并不是总体方差的无偏估计有关.

例 (新人教 A 版 214 页练习 5) [1] 某学校有高中学生 500 人, 其中男生 320 人, 女生 180 人. 有人为了获得该校全体高中学生的身高信息, 采用分层抽样抽取样本, 并观测样本的指标值 (单位: cm) , 计算得男生样本的均值为 173.5, 方差为 17, 女生样本的均值为 163.83, 方差为 30.03.

(1) 根据以上信息, 能够计算出总样本的均值和方差吗? 为什么?

(2) 如果已知男、女样本量按比例分配, 你能计算出总样本的均值和方差各为多少吗?

(3) 如果已知男、女的样本量都是 25, 你能计算出总样本的均值和方差各为多少吗? 它们分别作为总体均值和方差的估计合适吗? 为什么?

分析 (1) 总样本的均值和方差都需要知道各层的样本量才可以计算, 因此不能够计算出总样本的均值和方差. (2) 中明确指出这是按比例分配样本, 因此总样本的均值 $\overline{w}=\overline{W}=\dfrac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N} \approx 170.0188$, 总样本的方差

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{m[s_1^2+(\overline{x}-\overline{w})^2]+n[s_2^2+(\overline{y}-\overline{w})^2]}{m+n} \\ &= \frac{M[s_1^2+(\overline{x}-\overline{W})^2]+N[s_2^2+(\overline{y}-\overline{W})^2]}{M+N} \approx 43.235 \end{aligned}$$

. (3) 可以计算总样本的均值和方差, $\overline{w}=\dfrac{m\overline{x}+n\overline{y}}{m+n} \approx 168.665$, $s^2=\dfrac{m[s_1^2+(\overline{x}-\overline{w})^2]+n[s_2^2+(\overline{y}-\overline{w})^2]}{m+n} \approx 46.892$. 但是它们不能作为总体均值和方差的估计.

3.2 分层随机抽样样本方差估计总体的意义

方差是样本各值与平均数差的平方的加权平均数, 反映数据的偏离程度. 由 $s^2=\sum\limits_{i=1}^{n} w_i[s_i^2+(\overline{x_i}-\overline{x})^2]$, 则 $s^2=\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot s_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(\overline{x_i}-\overline{x})^2$. 其中, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot s_i^2$ 可理解为各层方差的加权平均数, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot (\overline{x_i}-\overline{x})^2$ 可理解为各层平均数与总体平均数的方差. 分层抽样中的方差受到各层内样

本和层与层之间的分配两方面因素影响, 一般把 $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot s_i^2$ 称为层内方差, 把 $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (\overline{x_i}-\overline{x})^2$ 称为层间方差; 因此在统计学中, 分层抽样的方差一般可分解为组间方差与组内方差之和.

3.3 分层随机抽样样本方差估计总体的优化

在教材中只给出了直接用样本方差来估计总体, 而并没有给出总体方差的计算公式, 以及样本方差与总体方差的联系. 下文将给出两种样本方差估计总体方差的方案.

方案一 在分层随机抽样中, 若层数分为 2 层, 第 1、2 层包含的个体数分别为 M 和 N, 第 1、2 层的总体平均数分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$, 总体平均数为 $\overline{W}$, 设总体方差为 S^2, 第 1、2 层的总体方差分别为 S_1^2, S_2^2, 则 $S^2=\frac{M}{M+N}[S_1^2+(\overline{X}-\overline{W})^2]+\frac{N}{M+N}[S_2^2+(\overline{Y}-\overline{W})^2]$.

设第 1, 2 层的样本平均数和方差分别为 $\overline{x}$, s_1^2, $\overline{y}$, s_2^2, 用 $\overline{x}, \overline{y}$ 估计 $\overline{X}, \overline{Y}$, $\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N}$ 估计 $\overline{W}$, 则有 $\frac{M}{M+N}[S_1^2+(\overline{x}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2]+\frac{N}{M+N}[S_2^2+(\overline{y}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2]$, 即 $\frac{M}{M+N}S_1^2+\frac{N}{M+N}S_2^2+\frac{MN}{(M+N)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2$ 估计总体方差 S^2. 同理, 用 s_1^2, s_2^2 估计 S_1^2, S_2^2, 则有 $\frac{M}{M+N}[s_1^2+(\overline{x}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2]+\frac{N}{M+N}[s_2^2+(\overline{y}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2]$, 即 $\frac{M}{M+N}s_1^2+\frac{N}{M+N}s_2^2+\frac{MN}{(M+N)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2$ 即估计总体方差 S^2.

在比例分配的分层抽样中, 由 $\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=\frac{m+n}{M+N}$, $\overline{W}=\overline{w}$, 则 $S^2=s^2$. 因此, 可以直接用样本方差 s^2 估计总体方差 S^2.

上述方案使用了课本所给的方差定义 ($S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$) 进行分层抽样方差公式的推导; 同时在方案中, 用各层样本方差作为各层总体方差的估计. 但从统计学的角度, 该方差并非对总体方差的无偏估计, 即用该样本方差并不能准确的估计总体方差.

方案二

定义 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为取自某总体的样本, 则它关于样本均值 $\overline{x}$ 的平均偏差常用 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 作为样本方差, 也称无偏方差[2]. 它是总体方差的无偏估计.

用无偏方差定义给出相应的分层随机抽样方差计算公式, 下文所涉方差均为无偏方差.

在分层随机抽样中, 若层数分为 2 层, 第 1、2 层包含的个体数分别为 M 和 N, 第 1、2 层的总体平均数分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$, 总体平均数为 $\overline{W}$, 设总体方差为 S^2, 第 1、2 层的总体方差分别为 S_1^2, S_2^2, 则

$$\begin{aligned}S^2=&\frac{M-1}{M+N-1}S_1^2+\frac{N-1}{M+N-1}S_2^2\\&+\frac{M}{M+N-1}(\overline{X}-\overline{W})^2+\frac{N}{M+N-1}(\overline{Y}-\overline{W})^2\\=&\frac{M-1}{M+N-1}S_1^2+\frac{N-1}{M+N-1}S_2^2\\&+\frac{MN}{(M+N-1)(M+N)}(\overline{X}-\overline{Y})^2.\end{aligned}$$

设第 1, 2 层的样本本平均数和方差分别为 $\overline{x}$, s_1^2, $\overline{y}$, s_2^2, 用 $\overline{x}, \overline{y}$ 估计 $\overline{X}, \overline{Y}$, s_1^2, s_2^2 估计 S_1^2, S_2^2, 则有

$$\begin{aligned}S^2=&\frac{M-1}{M+N-1}s_1^2+\frac{N-1}{M+N-1}s_2^2\\&+\frac{M}{M+N-1}(\overline{x}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2\\&+\frac{N}{M+N-1}(\overline{y}-\frac{M\overline{x}+N\overline{y}}{M+N})^2\\=&\frac{M-1}{M+N-1}s_1^2+\frac{N-1}{M+N-1}s_2^2\\&+\frac{MN}{(M+N-1)(M+N)}(\overline{x}-\overline{y})^2.\end{aligned}$$

不妨设 $\frac{m}{M}=f_1, \frac{n}{N}=f_2$, 则

$$\begin{aligned}S^2=&\frac{mf_2-f_1f_2}{mf_2+nf_1-f_1f_2}s_1^2+\frac{nf_1-f_1f_2}{mf_2+nf_1-f_1f_2}s_2^2\\&+\frac{mnf_1f_2}{(mf_2+nf_1-f_1f_2)(mf_2+nf_1)}(\overline{x}-\overline{y})^2.\end{aligned}$$

在比例分配的分层抽样中, $\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=f$, 则

$$\begin{aligned}S^2=&\frac{m-f}{m+n-f}s_1^2+\frac{n-f}{m+n-f}s_2^2\\&+\frac{m-f}{m+n-f}(\overline{x}-\overline{w})^2+\frac{n-f}{m+n-f}(\overline{y}-\overline{w})^2\\=&\frac{m-f}{m+n-f}s_1^2+\frac{n-f}{m+n-f}s_2^2\\&+\frac{mn}{(m+n-f)(m+n)}(\overline{x}-\overline{y})^2.\end{aligned}$$

由此可见, 在无偏方差下, 不能直接由总样本方差估计总体方差; 但可由各层样本方差及抽样比估计总体方差. 此外, 当抽样比是按比例分配时, 总样本方差最小.

命题 设从均值为 μ, 方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本, $\overline{x_1}$ 和 $\overline{x_2}$ 分别是这两个样本的均值. 对于任意常数 $a, b(a+b=1)$, $Y=a\overline{x_1}+b\overline{x_2}$ 都是 μ 的无偏估计, 且当 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}, b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$ 时, 使 $D(Y)$ 的方差达到最小.

证明 易知, 由于 $\overline{x_1}\sim(\mu,\frac{\sigma^2}{n_1})$, $\overline{x_2}\sim(\mu,\frac{\sigma^2}{n_2})$, 且 $Y=a\overline{x_1}+b\overline{x_2}$, $a+b=1$, 则有 $E(Y)=E(a\overline{x_1}+b\overline{x_2})=aE(\overline{x_1})+bE(\overline{x_2})=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$, Y 是 μ 的无偏估计得证. 由于两样本独立, $D(Y)=D(a\overline{x_1}+b\overline{x_2})=a^2D(\overline{x_1})+b^2D(\overline{x_2})=a^2\frac{\sigma^2}{n_1}+b^2\frac{\sigma^2}{n_2}$, 由 $a+b=1$, $D(Y)=$

基于核心素养的高中数学教材“函数的概念和性质”习题比较研究*

四川省南充市西华师范大学 (637002) 刘远来 李红梅

摘要 本研究选取 2019 年出版的四版教材中“函数的概念和性质”这一章的习题为研究对象, 对比四版教材数学核心素养类型和水平划分. 研究发现, 不同版本教材侧重的数学素养类型不同, 四版教材习题对数学运算素养重视程度较高, 对数学建模素养重视程度较低; 习题的素养水平分布不均并有所侧重.

关键词 数学核心素养; 教材习题; 函数的概念和性质; 比较研究

1 引言

《普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订) 》(下称《新课标》) 指出高中数学课程以学生发展为本, 落实立德树人根本任务, 培养科学精神和创新意识, 提升数学学科核心素养[1]. 教材作为课程目标的承载主体, 是师生开展教学的主要工具和资源[2]. 习题作为教材的重要组成部分, 有着消化巩固新知、拓展延伸新知、思想方法渗透、育人等功能[3]. 通过文献发现, 基于核心素养的教材习题比较研究集中于新旧教材的比较研究和不同地区现行版本的比较研究. 基于此, 本研究从课程标准对函数内容的要求出发, 以《新课标》中核心素养的内涵和水平划分为根据, 对比四版教材中“函数的概念和性质”习题的核心素养类型和水平划分, 分析四个版本的核心素养类型及其素养水平的侧重点, 帮助教师领会与适应新教材, 汲取不同版本的习题, 并为教师和教材编写者提出几点启示.

2 研究设计

2.1 研究对象

由于 2019 年版教材于 2022 年在全国大部分地区投入使用, 对一线教师将会是一次全新的挑战, 需要教师改变原

$a^2\frac{\sigma^2}{n_1}+b^2\frac{\sigma^2}{n_2}=a^2\frac{\sigma^2}{n_1}+(1-a)^2\frac{\sigma^2}{n_2}=(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a^2-\frac{2}{n_2}a+\frac{1}{n_2})\sigma^2$, 则 $\frac{\partial(D(Y))}{\partial a}=(2\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a-\frac{2}{n_2})\sigma^2$, 令 $\frac{\partial(D(Y))}{\partial a}=0$, 则 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$, $b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$ 得证.

3.4 新人教 A 版分层随机抽样方差下的教学

从分层随机抽样方差的计算公式可见, 无论是公式的推导, 记忆, 理解, 还是公式的计算与应用都是教学的难点. 此外, 针对新人教 A 版的内容, 直接用样本方差估计总体方差时所用到的是样本平均数, 即无论是否按比例分配, 所使用的都是样本本身的样本量; 这与用样本平均数估计总体平均数时, 使用的是总体比例不同.

面对新教材中的这一大变化, 教师在教学中需做好备课工作, 课前要对分层随机抽样方差计算公式的推导、理解、应用理解透彻; 考虑到计算公式的抽象性, 符号字母的多样性, 应考虑对教材例题进行适当设计, 如先减少样本量, 让学生考虑样本量很小 (如样本量为 10) 时, 应如何计算样本方差, 从中归纳概括出样本方差的计算公式. 而对样本方差的计算公式推导, 由于涉及求和符号以及相应的运算性质, 学生在此前并未接触, 因此容易使学生产生障碍. 因此应考虑学生的层次进行选择, 如在让学生根据例子自行归纳出计算公式后, 直接类比给出公式而不推导 (新人教 B 版) , 或在拓展出另外补充推导过程但不具体细致讲解, 而是分析相关思路 (新北师大版) , 或利用具体例子进行推导 (新人教 A 版) . 在推导时应考虑尽量避免求和符号的使用, 或者应在前期教学中对求和符号及运算性质进行训练或熟悉, 以避免求和符号造成的障碍. 此外, 结合新课程标准对学生核心素养以及思维的培养与拓展, 教师也可设计问题串引导学生探究样本方差估计总体方差的优化方案, 以加深学生对方差的理解.

参考文献

[1] 章建跃, 李增沪主编. 普通高中教科书数学必修第二册 (A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2021: 182-189, 212-216.

[2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙编著. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017: 303.

*西华师范大学英才计划课题“教师资格考试制度与教师培养模式改革研究——以数学学科为例”(17YC378) . 西华师范大学横向项目课题: “中小学生数学核心素养培养研究”(项目编号: 401589) ; 西华师范大学教育硕士优秀案例教学研究项目: “两步”怎么证明“无限”的命题——数学归纳法教学设计与实施 (项目编号: 451029) . 问题提出视角下的数学教学——以任意三角函数为例 (项目编号: 451056) .