例析统计与概率试题

李洪杰
(山东省莱西市第二中学)

统计与概率试题主要考查学生的数据处理能力和运算求解能力.解题时,如果我们能够充分依据教材知识优化解题思维过程,那么便可提高解题速度和准确率.

1 分层抽样

例1 某市实验中学初中部初一年级有学生400人,初二年级有学生300人,初三年级有学生250人,现从初中部所有学生中,按照分层抽样的方法抽取容量为190的样本,试问各年级应该分别抽取多少人?

解析 **方法1** 由题意可知总体容量为$400+300+250=950$,根据各层所占的比例不改变,可得初一年级学生应抽取$\frac{190}{950}\times400=80$人,初二年级学生应抽取$\frac{190}{950}\times300=60$人,初三年级学生应抽取$\frac{190}{950}\times250=50$人.

方法2 根据分层抽样的概念,可知抽样前后各层之间的比值不变,所以样本中,初一、初二、初三学生的人数之比为$400:300:250=8:6:5$.可设初一、初二、初三年级应抽取的人数分别为$8x,6x,5x$.于是,由样本容量为190可得$8x+6x+5x=190$,解得$x=10$,故初一、初二、初三年级应分别抽取学生80人、60人、50人.

点评 一般地,设总体中第i层的个体数是N_i,样本中第i层的个体数是n_i,这里$i=1,2,3,\cdots,k$,则总体中各层的个体数之比等于样本中各层的个体数之比,即$N_1:N_2:\cdots:N_k=n_1:n_2:\cdots:n_k$.

2 一组数据的平均数和方差

例2 对于一组数据$z_i(i=1,2,3,\cdots,n)$,如果将它们改变为$z_i-c(i=1,2,3,\cdots,n)$(其中$c>0$),那么下列结论正确的是( ).

A. 平均数等于原来的平均数减去c,方差等于原来的方差减去c^2

B. 平均数等于原来的平均数减去c,方差等于原来的方差

C. 平均数等于原来的平均数加上c,方差等于原来的方差加上c^2

D. 平均数等于原来的平均数加上c,方差等于原来的方差

解析 **方法1** 设一组数据$z_i(i=1,2,3,\cdots,n)$的平均数为$\bar{z}$,方差为s^2,所以一组数据z_i-c的平均数和方差分别为

$$\frac{z_1-c+z_2-c+\cdots+z_n-c}{n}=\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}-c=\bar{z}-c,$$

$$\frac{1}{n}\{[(z_1-c)-(\bar{z}-c)]^2+[(z_2-c)-(\bar{z}-c)]^2+\cdots+[(z_n-c)-(\bar{z}-c)]^2\}=\frac{1}{n}[(z_1-\bar{z})^2+(z_2-\bar{z})^2+\cdots+(z_n-\bar{z})^2]=s^2,$$

则平均数比原来的少c,方差与原来的一样,故选B.

方法2 设一组数据$z_i(i=1,2,3,\cdots,n)$的平均数为$\bar{z}$,方差为s^2,则根据相关规律,易知一组数据z_i-c的平均数为$\bar{z}-c$,方差为s^2,故选B.

点评 一般地,求解一组数$ax_i+b(i=1,2,3,\cdots,n)$的平均数和方差,可利用如下规律:若$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数是$\bar{x}$,方差是s^2,则$ax_1+b,ax_2+b,\cdots,ax_n+b$的平均数是$a\bar{x}+b$,方差是$a^2s^2$.

3 复杂事件的概率

例3 同时抛掷两枚质地均匀的骰子,则3点和5点中至少有一个出现的概率为______.

解析 **方法1** 设"3点和5点中至少有一个出现"为事件A,"3点至少出现一个但是5点不出现"为事件B,"5点至少出现一个但是3点不出现"为事件C,"3点和5点同时出现"为事件D,则$A=B+C+D$.

由于同时抛掷两枚质地均匀的骰子一共可产生36种等可能的结果:(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),…,(6,6),注意到3点至少出现一个但是5点不出现一共有9种等可能的结果:(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(6,3);5点至少出现一个但是3点不出现一共有9种等可能的结果:(5,1),(5,2),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(4,5),(6,5);3点和5点同时出现一共有2种等可能的结果:(3,5),(5,3).因此,根据互斥事件的概率加法公式可得

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{9}{36}+\frac{9}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{9}.$$

方法2 设"3点和5点中至少有一个出现"为事件A,则事件A的对立事件$\overline{A}$为"3点和5点均没有出现".由于同时抛掷两枚质地均匀的骰子一共有36种等可能的结果:(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),…,(6,6),既没有3点也没有5点出现共有16种等可能结果:(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(4,1),(4,2),(4,4),(4,6),(6,1),(6,2),(6,4),(6,6),所以根据对立事件的概率公式可得$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9}$.

点评 一般地,求复杂事件A的概率时,往往可先求$\overline{A}$的概率,再利用公式$P(A)=1-P(\overline{A})$来计算.

4 超几何分布的数学期望

例4 在一场比赛中,某篮球队的11名队员中共有9名上场比赛,其得分情况如下:

4 6 7 8 12 14 15 20 22

从上述得分超过10分的队员中任取3人,记选中的3人中得分不低于20分的人数为ξ,则ξ的数学期望为________.

解析 **方法1** 由题设知得分超过10分的有5人,得分不低于20分的有2人,则$\xi=0,1,2$,且

$$P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10},P(\xi=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},$$

故$E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

方法2 由题设知得分超过10分的有5人,得分不低于20分的有2人,所以ξ服从超几何分布,故$E(\xi)=\frac{2}{5}\times3=\frac{6}{5}$.

点评 若随机变量满足超几何分布,则可利用如下规律:在含有M件次品的N件产品中,任取n $(n\leqslant N)$件,则其中次品数X服从超几何分布,且X的数学期望为$E(X)=\frac{M}{N}\cdot n$.

5 二项分布的数学期望

例5 有一种"套圈"游戏,其规则如下:1元钱可购买2个圆形套圈,玩家必须站在指定位置向地面上的奖品抛掷,每次只允许投掷一个圆形套圈,若某奖品被套住,则该奖品归玩家.商家会更换同样的玩具供玩家继续游戏.已知玩家很想获得一款布娃娃玩具,假设玩家每次投掷套中该奖品的概率都是0.2.现已知玩家一共消费2元,那么该玩家获取该款布娃娃玩具的个数X的数学期望为________.

解析 **方法1** 由题设可知2元可买到共$2\times2=4$个套圈,从而易知$X=0,1,2,3,4$,且

$$P(X=0)=C_4^0\times0.2^0\times(1-0.2)^4=\frac{256}{625},$$

$$P(X=1)=C_4^1\times0.2^1\times(1-0.2)^3=\frac{256}{625},$$

$$P(X=2)=C_4^2\times0.2^2\times(1-0.2)^2=\frac{96}{625},$$

$$P(X=3)=C_4^3\times0.2^3\times(1-0.2)^1=\frac{16}{625},$$

$$P(X=4)=C_4^4\times0.2^4\times(1-0.2)^0=\frac{1}{625},$$

故$E(X)=0\times\frac{256}{625}+1\times\frac{256}{625}+2\times\frac{96}{625}+3\times\frac{16}{625}+4\times\frac{1}{625}=\frac{4}{5}$.

方法2 由题设知2元可买到$2\times2=4$个套圈,从而易知$X\sim B(4,0.2)$,则$E(X)=4\times0.2=0.8$.

点评 若随机变量满足二项分布,则可利用如下规律:一般地,若$X\sim B(n,p)$,则$E(X)=np$.

对于以上5道例题,相较于方法1,方法2更加便捷.关注统计与概率试题解法的优化,将所学数学知识与方法综合应用于解题中,有利于优化解题思维过程,加深对教材知识的理解,提升解题技巧.

(完)