江苏省仪征中学 2023-2024 学年第二学期期末复习卷（2）

一、单选题

1. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 13，弧长为 10π的扇形，则该圆锥的体积为(　)

A. 100π　　B. 120π　　C. 150π　　D. 300π

2. 已知 m，n 为不同的直线，α，β为不同的平面，下列命题为假命题的有(　)

A. $m\perp\alpha$，$m\perp\beta\Rightarrow\alpha//\beta$　　B. $m//n$，$n\subset\alpha\Rightarrow m//\alpha$

C. $m\perp\alpha$，$m\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$　　D. $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha\Rightarrow m//n$

3. $\tan 10^\circ+\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ=$(　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

4. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$(　)

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

5. 已知一组数据：12，16，22，24，25，31，33，35，45，若去掉 12 和 45，将剩下的数据与原数据相比，则(　)

A. 极差不变　　B. 平均数不变　　C. 方差不变　　D. 上四分位数不变

6. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\left(x\in\left[0,\frac{13\pi}{6}\right]\right)$，若函数 $y=f(x)-\frac{8}{9}$ 恰有 5 个零点，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，$(x_1<x_2<x_3<x_4<x_5)$，则 $x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5$ 的值为 (　)

A. $\frac{35\pi}{3}$　　B. 4π　　C. 5π　　D. $\frac{22\pi}{3}$

二、多选题

7. 已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\theta,\sin\theta)(0\le\theta\le\pi)$，则下列说法正确的是(　)

A. 若$\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\theta=\sqrt{3}$　　B. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$，θ的值为$\frac{5\pi}{6}$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}$的取值范围为$[-\sqrt{3},2]$　　D. 存在θ，使得$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

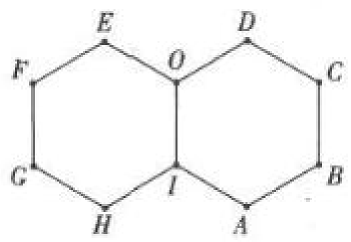
8. 将一枚质地均匀且标有数字 1，2，3，4，5，6 的骰子随机掷两次，记录每次正面朝上的数字.甲表示事件“第一次掷出的数字是 1”，乙表示事件“第二次掷出的数字是 2”，丙表示事件“两次掷出的数字之和是 8”，丁表示事件“两次掷出的数字之和是 7”.则 (　)

A. 事件甲与事件丙是互斥事件　　B. 事件甲与事件丁是相互独立事件

C. 事件乙包含于事件丙　　D. 事件丙与事件丁是对立事件

三、填空题

9. 如图是由两个有一个公共边的正六边形构成的平面图形$\varGamma$，其中正六边形边长为 1.设$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AI}}$，则$x+y=$__________;$P$是平面图形$\varGamma$边上的动点，则$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$的取值范围是__________.



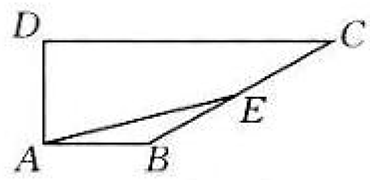
10. 在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在棱 AB，AC 上，满足$BE=1$，$EF=2$，$EF//$平面 BCD，则棱 AB 长为__________，以点 A 为球心，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$为半径作一个球，则该球球面与正四面体 $ABCD$ 的表面相交所得到的曲线长度之和为__________.

四、解答题

11. 如图，在平面四边形$ABCD$中，E为线段BC的中点，$\angle DAB=90°$.

(1)若$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle ABE=150°$，$\angle C=30°$，求AE;

(2)若$AD=AB=2$，$\angle C=45°$，求AE的最大值.



12. 已知复数$z=(\frac{1+i}{1-i})^{2020}+(1-i)^2$(其中 i 为虚数单位).若复数 z 的共轭复数为$\overline{z}$，且$\overline{z}\cdot z_1=4+3\mathrm{i}$.

(1)求复数z_1及z_1在复平面中对应点的坐标；

(2)若z_1是关于 x 的方程$x^2-px+q=0$ 的一个根，求实数 p，q 的值，并求出方程$x^2-px+q=0$ 的另一个复数根.

13.

某村为响应国家乡村振兴战略，扎实推动乡村产业，提高村民收益，种植了一批琯溪蜜柚．现为了更好地销售，从该村的蜜柚树上随机摘下了 100 个蜜柚进行测重，测得其质量（单位：千克）均分布在区间[1.5,7.5]内，并绘制了如图所示的频率分布直方图：

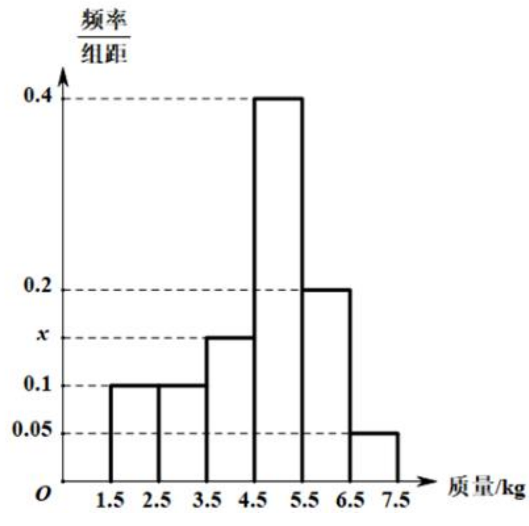
（1）按分层随机抽样的方法从质量落在区间[2.5,3.5)，[3.5,4.5)的蜜柚中随机抽取 5 个，再从这 5 个蜜柚中随机抽取 2 个，求这 2 个蜜柚质量至少有一个小于 3.5 千克的概率；

（2）以各组数据的中间数值代表这组数据的平均水平，以频率代表概率，已知该村的蜜柚树上大约还有 5 000 个蜜柚待出售，某电商提出两种收购方案：

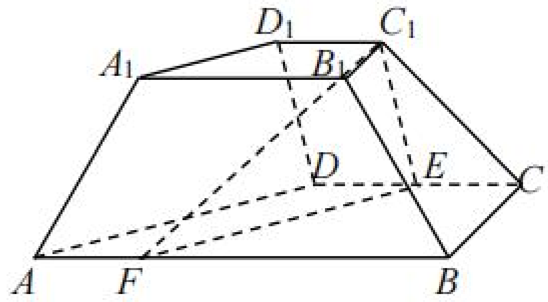
A．所有蜜柚均以 20 元/千克收购；

B．低于 4.5 千克的蜜柚以 70 元/个的价格收购，高于或等于 4.5 千克的蜜柚以 90 元/个的价格收购．

请你通过计算为该村选择收益最好的方案．



14. 如图，在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//DC$，$BC\perp$侧面ABB_1A_1，$AB=2$，$AA_1=A_1B_1=BB_1=BC=CD=1$，E为CD的中点，F为棱AB上的点，$C_1F//$平面ADD_1A_1.



(1)证明：平面$C_1EF//$平面ADD_1A_1;

(2)求AF;

(3)求二面角C_1-AB-C的大小.

江苏省仪征中学 2023-2024 学年第二学期期末复习卷（2）

一、单选题

1. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 13，弧长为 10π的扇形，则该圆锥的体积为(　)

A. 100π　　B. 120π　　C. 150π　　D. 300π

【答案】A

【解答】

解：圆锥的侧面展开图是一个半径为 13，弧长为 10π的扇形，

设圆锥底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=10\pi$，故$r=5$，

又圆锥的母线为 13，故高为$\sqrt{13^2-5^2}=12$，

故该圆锥的体积为$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12=100\pi$.

故选A.

2. 已知 m，n 为不同的直线，α，β为不同的平面，下列命题为假命题的有(　)

A. $m\perp\alpha$，$m\perp\beta\Rightarrow\alpha//\beta$　　B. $m//n$，$n\subset\alpha\Rightarrow m//\alpha$

C. $m\perp\alpha$，$m\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$　　D. $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha\Rightarrow m//n$

【答案】B

【解答】

解：对于 A：垂直于同一直线的两个平面平行，故 A 正确；

对于 B：$m//n$，$n\subset\alpha\Rightarrow m//\alpha$或$m\subset\alpha$，故 B 错误；

对于 C：由面面垂直的判断定理，故 C 正确；

对于 D：垂直于同一平面的两直线平行，故 D 正确.

3. $\tan 10^\circ+\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ=$(　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【解答】

解：因为 $\tan(10^\circ+50^\circ)=\frac{\tan10^\circ+\tan50^\circ}{1-\tan10^\circ\tan50^\circ}=\sqrt{3}$，

所以$\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan10^\circ\tan50^\circ=\tan10^\circ+\tan50^\circ$，

所以 $\tan10^\circ+\tan50^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ\tan50^\circ=\sqrt{3}$.

故选：B.

4. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$(　)

A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

【答案】B

【解答】

解：因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$,

且 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$,

则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$,

故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\ \alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

即 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$.

故选：B.

5. 已知一组数据：12，16，22，24，25，31，33，35，45，若去掉 12 和 45，将剩下的数据与原数据相比，则(　)

A. 极差不变 B. 平均数不变 C. 方差不变 D. 上四分位数不变

【答案】D

【解答】

解：在这组数据：12，16，22，24，25，31，33，35，45 中去掉 12 和 45 后，得到 16，22，24，25，31，33，35，

显然极差由 $45-12=33$ 变成了 $35-16=19$，故 A 错误；

原平均数为

$$\overline{x}=\frac{1}{9}(12+16+22+24+25+31+33+35+45)$$

$=\frac{243}{9}=27$，

现平均数为

$$\overline{x'}=\frac{1}{7}(16+22+24+25+31+33+35)$$

$=\frac{186}{7}\neq 27$，故 B 错误；

原方差为$s^2=\frac{1}{9}[12^2+16^2+22^2+24^2+25^2+31^2+$

$33^2+35^2+45^2-9\times 27^2]=\frac{824}{9}$,

现方差为$s'^2=\frac{1}{7}[16^2+22^2+24^2+25^2+31^2+$

$33^2+35^2-7\times(\frac{186}{7})^2]=\frac{1916}{49}$,

显然方差不同，故 C 错误；

对于D项，由 $9\times\frac{1}{4}=2.25$，知原数据的上四分位数是第三个数据 22，又由 $7\times\frac{1}{4}=1.75$，知现数据的上四分位数是第二个数据 22，故 D 正确．

故选：D．

6. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\left(x\in\left[0,\frac{13\pi}{6}\right]\right)$，若函数 $y=f\left(x\right)-\frac{8}{9}$ 恰有 5 个零点，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，$\left(x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\right)$，则 $x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5$ 的值为（　）

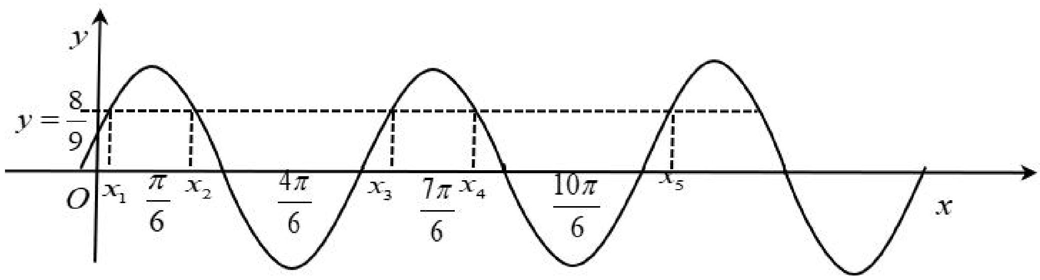
A. $\frac{35\pi}{3}$　　B. 4π　　C. 5π　　D. $\frac{22\pi}{3}$

【答案】D

【解答】解：由函数 $y=f\left(x\right)-\frac{8}{9}$ 恰有 5 个零点，知 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{9}$ 有 5 个根，

由五点法作图，

$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	0	1	0	-1	0



如图，可知 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 过点 $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，$\left(\frac{4\pi}{6},-1\right)$，$\left(\frac{7\pi}{6},1\right)$，$\left(\frac{10\pi}{6},-1\right)$

又 $f\left(0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}<\frac{8}{9}$

则 $x_1+x_2=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$x_2+x_3=2\times\frac{4\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$，$x_3+x_4=2\times\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{3}$，$x_4+x_5=2\times\frac{10\pi}{6}=\frac{10\pi}{3}$

$\therefore x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5=\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+\frac{7\pi}{3}+\frac{10\pi}{3}=\frac{22\pi}{3}$

故选：D.

二、多选题

7. 已知向量$\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=(\cos\theta,\sin\theta)(0\le\theta\le\pi)$，则下列说法正确的是(　)

A. 若$\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\theta=\sqrt{3}$

B. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$，θ的值为$\frac{5\pi}{6}$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}$的取值范围为$\left[-\sqrt{3},2\right]$

D. 存在θ，使得$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$

【答案】AB

【解答】

解：对于 A，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\sqrt{3}\cos\theta=\sin\theta$，所以 $\tan\theta=\sqrt{3}$，故 A 正确；

对于 B，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$，所以 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $0\le\theta\le\pi$，所以 θ 的值为 $\frac{5\pi}{6}$，故 B 正确；

对于 C，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $0\le\theta\le\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}\le\theta+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的取值范围为 $[-1,2]$，故 C 错误；

对于 D，$\vec{a}-\vec{b}=\left(1-\cos\theta,\sqrt{3}-\sin\theta\right)$，所以 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\left(\sqrt{3}-\sin\theta\right)^2}=\sqrt{5-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$，$|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=2+1=3$，

若 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$，则 $\sqrt{5-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=3$，得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

解得 $\theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，因为 $0\le\theta\le\pi$，所以 $0\le-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\pi$，解得 $\frac{1}{3}\le k\le\frac{5}{6}$，

因为 $k\in Z$，所以无解，故 D 错误.

故选：AB.

8. 将一枚质地均匀且标有数字 1，2，3，4，5，6 的骰子随机掷两次，记录每次正面朝上的数字.甲表示事件“第一次掷出的数字是 1”，乙表示事件“第二次掷出的数字是 2”，丙表示事件“两次掷出的数字之和是 8”，丁表示事件“两次掷出的数字之和是 7”.则(　)

A. 事件甲与事件丙是互斥事件

B. 事件甲与事件丁是相互独立事件

C. 事件乙包含于事件丙

D. 事件丙与事件丁是对立事件

【答案】AB

【解析】【分析】

本题考查互斥事件和对立事件的定义、事件的包含、相互独立事件的判断，属于基础题.

根据互斥事件、相互独立事件、事件的包含、对立事件的概念，依次分析选项是否正确.

【解答】

解：根据题意，一枚质地均匀且标有数字 1，2，3，4，5，6 的骰子随机掷两次，所有可能的情况有 36 种.

甲表示事件“第一次掷出的数字是 1”所有可能为：$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(1,6)$

乙表示事件“第二次掷出的数字是 2”所有可能为：$(1,2)$，$(2,2)$，$(3,2)$，$(4,2)$，$(5,2)$，$(6,2)$

丙表示事件“两次掷出的数字之和是 8”所有可能为：$(2,6)$，$(3,5)$，$(4,4)$，$(5,3)$，$(6,2)$，

丁表示事件“两次掷出的数字之和是 7”所有可能为$(1,6)$，$(2,5)$，$(3,4)$，$(4,3)$，$(5,2)$，$(6,1)$，

对于A，甲表示事件“第一次掷出的数字是 1”，

丙表示事件“两次掷出的数字之和是 8”，显然不可能同时发生，是互斥事件，故 A 正确；

对于B，$P(甲)=\frac{1}{6}$，$P(丁)=\frac{1}{6}$，

甲事件和丁事件的积事件包含的所有可能：$(1,6)$，则$P(甲\cap丁)=\frac{1}{36}=P(甲)P(丁)$，即事件甲与事件丁是相互独立事件，故 B 正确；

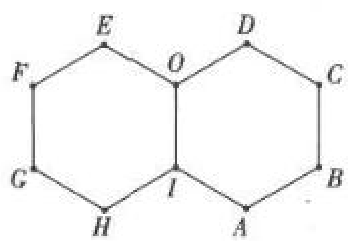
对于C，事件乙发生，事件丙不一定发生，故 C 错误；

对于D，事件丙不发生不一定发生事件丁，事件丙与事件丁不是对立事件，故 D 错误；

故选：AB.

三、填空题

9. 如图是由两个有一个公共边的正六边形构成的平面图形Γ，其中正六边形边长为 1.设$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AI}}$，则$x+y=$__________;$P$是平面图形$\Gamma$边上的动点，则$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$的取值范围是__________.



【答案】1 ； $[-3,\frac{3}{2}]$

【解答】

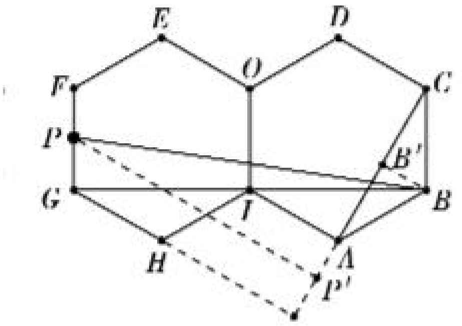
解：(1)：由图形知：B，I，G 三点共线，则由三点共线知：$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AI}$，$x+y=1$;

(2)：连 AC，作$BB'\perp AC$于B'，$PP'\perp AC$于P'，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'P'}$

则当 P 在 DC 上时投影P'在点 C，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'P'}=\frac{3}{2}$为最大值;

当 P 在 GH 上时取得最小值，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'P'}=-3$，

故$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$取值范围为$[-3,\frac{3}{2}]$.



10. 在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在棱 AB，AC 上，满足$BE=1$，$EF=2$，$EF//$平面 BCD，则棱 AB 长为__________，以点 A 为球心，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$为半径作一个球，则该球球面与正四面体 $ABCD$ 的表面相交所得到的曲线长度之和为__________.

【答案】3 ； $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$

【解答】

解：因为$EF//$平面 BCD，平面$ABC\cap$平面$BCD=BC$，$EF\subset$平面 ABC，

所以$EF//BC$，由于正四面体 $ABCD$ 每个面都是等边三角形，故 AEF 也为等边三角形，

所以$AB=AE+BE=BE+EF=1+2=3$.

球面与正四面体 $ABCD$ 的四个面都相交，

所得的交线分为两类：一类是与三个侧面 ABD，ABC，ACD 的交线，

另一类是与底面 BCD 的交线，易知与侧面 ABC 的交线为弧 MN，

如图，弧 MN 的过球心的大圆上，$AM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\angle BAC=60°$，

所以弧 MN 的长度为$\frac{\pi}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，易知球面与侧面 ABD，ACD 的交线与弧 MN 一样长.

过 A 作$AO\perp$平面 BCD，连接 DO，并延长交 BC 于点 P，连接 AP，

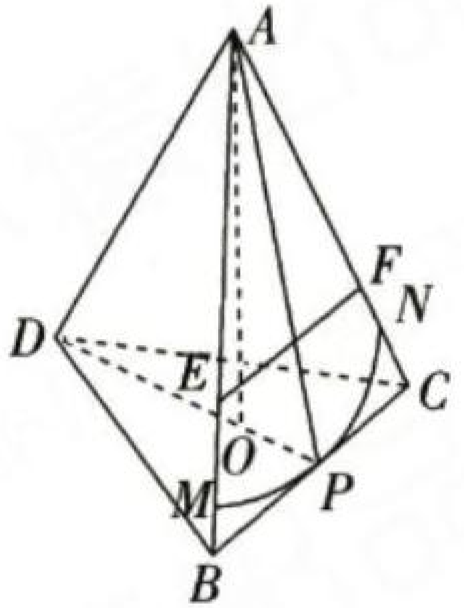
则$OD=\frac{2}{3}DP=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\sqrt{3}$，

所以$AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=\sqrt{6}<\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故球面与底面 BCD 形成的交线是$\triangle BCD$的内切圆半径为$OP=\frac{1}{3}DP=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故内切圆的周长为 $2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\pi$.

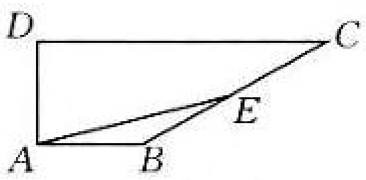
故所求曲线长度之和为 $3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\pi=\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$.



故答案为：3；$\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$.

四、解答题

11. 如图，在平面四边形$ABCD$中，E为线段BC的中点，$\angle DAB=90°$．



(1)若$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle ABE=150°$，$\angle C=30°$，求AE;

(2)若$AD=AB=2$，$\angle C=45°$，求AE的最大值．

【答案】解：(1)连接BD．

在$\triangle ABD$中，$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle DAB=90°$，所以$BD=2$，$\angle ABD=45°$．

因为$\angle ABE=150°$，所以$\angle CBD=105°$，$\angle BDC=180°-\angle C-\angle CBD$

$=45°$．

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle C}$，解得$BC=2\sqrt{2}$，所以$BE=\sqrt{2}$.

在$\triangle ABE$中，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos\angle ABE}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$·

(2)设$\angle DBC=\theta\in(0,\frac{3\pi}{4})$

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$,

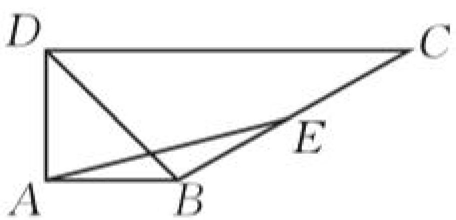
所以$BC=4\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，$BE=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，

在$\triangle ABE$中，由余弦定理知$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos\angle ABE$

$$=4+4\sin^2(\theta+\frac{\pi}{4})-2\times2\times2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$$
$$=4+2-2\cos(2\theta+\frac{\pi}{2})-4\sin(2\theta+\frac{\pi}{2})$$
$$=6+2\sin2\theta-4\cos2\theta$$
$$=6+2\sqrt{5}\sin(2\theta-\varphi)$$，其中 $\tan\varphi=2$.

当 $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$(AE^2)_{\max}=6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$，即$AE_{\max}=\sqrt{5}+1$.

故 AE 的最大值为$\sqrt{5}+1$.



12. 已知复数$z=(\frac{1+i}{1-i})^{2020}+(1-i)^2$(其中 i 为虚数单位).若复数 z 的共轭复数为$\overline{z}$，且$\overline{z}\cdot z_1=4+3\mathrm{i}$.

(1)求复数z_1及z_1在复平面中对应点的坐标；

(2)若z_1是关于 x 的方程$x^2-px+q=0$ 的一个根，求实数 p，q 的值，并求出方程$x^2-px+q=0$ 的另一个复数根.

【答案】解：(1)$z=(\frac{1+i}{1-i})^{2020}+(1-i)^2$

$=i^{2020}-2i=1-2i$，

所以复数 z 的共轭复数为$\overline{z}=1+2i$.

因为$\overline{z}\cdot z_1=4+3i$，

所以$z_1=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(1-2i)(4+3i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$$=\frac{10-5i}{5}=2-i$$

所以$z_1=2-i$，z_1在复平面中对应点的坐标为$(2,-1)$.

(2)若$z_1=2-i$是关于 x 的方程$x^2-px+q=0$ 的一个根，则$(2-i)^2-p(2-i)+q=0$，

即$(p-4)i+3-2p+q=0$，

所以$\begin{cases}3-2p+q=0,\\p-4=0,\end{cases}$

解得：$p=4$，$q=5$，

$x^2-4x+5=0$，$(x-2)^2=i^2$，

所以方程另一根为 $2+i$.

13.

某村为响应国家乡村振兴战略，扎实推动乡村产业，提高村民收益，种植了一批琯溪蜜柚．现为了更好地销售，从该村的蜜柚树上随机摘下了 100 个蜜柚进行测重，测得其质量（单位：千克）均分布在区间 $[1.5,7.5]$内，并绘制了如图所示的频率分布直方图：

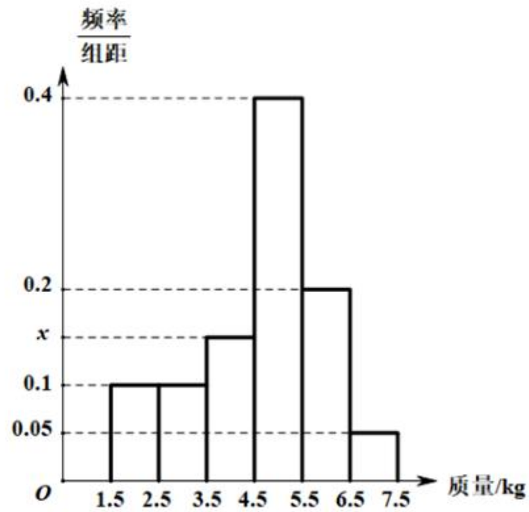
（1）按分层随机抽样的方法从质量落在区间$[2.5,3.5)$，$[3.5,4.5)$的蜜柚中随机抽取 5 个，再从这 5 个蜜柚中随机抽取 2 个，求这 2 个蜜柚质量至少有一个小于 3.5 千克的概率；

（2）以各组数据的中间数值代表这组数据的平均水平，以频率代表概率，已知该村的蜜柚树上大约还有 5 000 个蜜柚待出售，某电商提出两种收购方案：

A．所有蜜柚均以 20 元/千克收购；

B．低于 4.5 千克的蜜柚以 70 元/个的价格收购，高于或等于 4.5 千克的蜜柚以 90 元/个的价格收购．

请你通过计算为该村选择收益最好的方案．



（1）由题意得：$x=1-(0.1\times 2+0.4+0.2+0.05)=0.15$ …1 分

所以蜜柚质量在区间$[2.5,3.5)$和$[3.5,4.5)$的比为 2□3，

所以应分别在质量为$[2.5,3.5)$,$[3.5,4.5)$的蜜柚中抽取 2 个和 3 个. …3 分

记抽取的 2 个蜜柚中质量至少有一个小于 3.5 千克为事件 A

抽取的质量在区间$[2.5,3.5)$的蜜柚分别记为a_1,a_2，质量在区间$[3.5,4.5)$的蜜柚分别记为b_1,b_2,b_3，

则从这 5 个蜜柚中随机抽取 2 个，

样本空间$\Omega=\{a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,b_1b_2,b_1b_3,b_2b_3\}$，共 10 个样本点

$A=\{a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3\}$，共 7 个样本点，

所以$P(A)=\dfrac{7}{10}$. …6 分

另解：事件 A 对立事件$\overline{A}=\{b_1b_2,b_1b_3,b_2b_3\}$，共 3 个样本点，

所以：$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$ …6 分

（2）方案 A 好， …7 分

由题中频率分布直方图可知，蜜柚质量在区间$[1.5,2.5),[2.5,3.5),[3.5,4.5),[4.5,5.5),[5.5,6.5),[6.5,7.5)$的频率依次为$0.1,0.1,0.15,0.4,0.2,0.05$，

若按方案 A 收购：由题意知各区间的蜜柚个数依次为$500,500,750,2000,1000,250$，

于是总收益为$(\dfrac{1.5+2.5}{2}\times 500+\dfrac{2.5+3.5}{2}\times 500+\dfrac{3.5+4.5}{2}\times 750+\dfrac{4.5+5.5}{2}\times 2000$

$+\dfrac{5.5+6.5}{2}\times 1000+\dfrac{6.5+7.5}{2}\times 250)\times 20=465000$(元). …10 分

若按方案B收购：由题意知蜜柚质量低于 4.5 千克的个数为1750，

蜜柚质量高于或等于 4.5 千克的个数为$5000-1750=3250$，

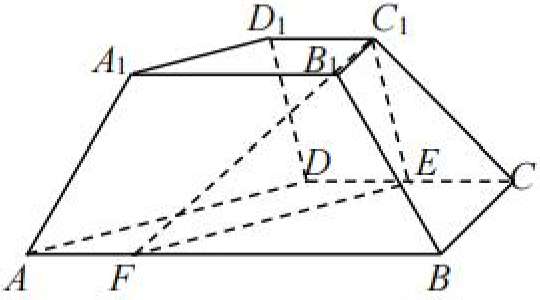
所以总收益为$1750\times 70+3250\times 90=415000$(元).

因为$415000<465000$，

所以方案 A 的收益比方案 B 的收益高，应该选择方案 A. …12 分

1. (本小题 12 分)

14. 如图，在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//DC$，$BC\perp$侧面ABB_1A_1，$AB=2$，$AA_1=A_1B_1=BB_1=BC=CD=1$，E为CD的中点，F为棱AB上的点，$C_1F//$平面ADD_1A_1.



(1)证明：平面$C_1EF//$平面ADD_1A_1;

(2)求AF;

(3)求二面角C_1-AB-C的大小.

【答案】解：(1)在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

因为$AB=2$，$A_1B_1=CD=1$，

所以$\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{2}$，所以$C_1D_1=\frac{1}{2}$.

又因为E为CD的中点，所以$DE=\frac{1}{2}$.

四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$DE//C_1D_1$，

所以四边形C_1D_1DE是平行四边形，

所以$C_1E//DD_1$.

又$C_1E\not\subset$平面ADD_1A_1，$DD_1\subset$平面ADD_1A_1，

所以$C_1E//$平面ADD_1A_1.

又因为$C_1F//$平面ADD_1A_1，$C_1E\subset$平面C_1EF，$C_1F\subset$平面C_1EF，$C_1E\cap C_1F=C_1$，

所以平面$C_1EF//$平面ADD_1A_1.

(2)由(1)知平面$C_1EF//$平面ADD_1A_1，

又因为平面$C_1EF\cap$平面$ABCD=EF$，平面$ADD_1A_1\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$AD//EF$.

又因为$AB//CD$，所以四边形$ADEF$是平行四边形，所以$DE=AF$.

又由(1)知$DE=\frac{1}{2}$，所以$AF=\frac{1}{2}$.

(3)在梯形ABB_1A_1中，过点B_1作AB的垂线，垂足为M，连结EM，C_1M.

因为$A_1B_1=AA_1=BB_1=1$，$AB=2$，

所以$B_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BM=\frac{1}{2}$.

在梯形$ABCD$中，因为$BM//CE$，$BM=CE$，

所以四边形$BCEM$是平行四边形，

所以$BC//EM$，

所以$B_1C_1//BC//EM$.

又因为$BC\perp$平面ABB_1A_1，$AB\subset$平面ABB_1A_1，

所以$BC\perp AB$，

所以$EM\perp AB$.

又因为$B_1M\perp AB$，$EM\subset$平面B_1C_1EM，$B_1M\subset$平面B_1C_1EM，$EM\cap B_1M=M$，

所以$AB\perp$平面B_1C_1EM.

又因为$C_1M\subset$平面B_1C_1EM，所以$AB\perp C_1M$，

所以二面角C_1-AB-C的平面角是$\angle C_1ME$.

因为$BC=1$，$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{1}{2}$，所以$B_1C_1=\frac{1}{2}$.

因为$BC\perp$平面ABB_1A_1， $B_1M\subset$平面ABB_1A_1，

所以$BC\perp B_1M$.

因为$BC//B_1C_1//EM$，

所以$B_1M\perp B_1C_1$，$B_1M\perp EM$.

在$Rt\triangle B_1C_1M$中，$B_1C_1=\frac{1}{2}$，$B_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\angle B_1MC_1=\frac{\pi}{6}$，

所以$\angle C_1ME=\frac{\pi}{3}$.

所以二面角C_1-AB-C的大小是$\frac{\pi}{3}$.