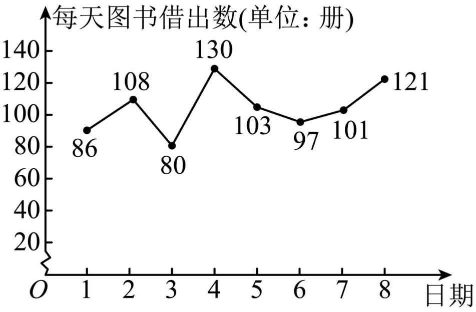
江苏省仪征中学 2023-2024 学年第二学期期末复习卷（3）

一、单选题

1. 某学校采用分层随机抽样方法，抽取一定数量的高中学生参加安全知识竞赛.若得到的样本中高二的学生数量比高一多 40 人、比高三少 20 人，且全校高一、高三学生数之比为 2:3，则样本容量为(　)

A. 120　　B. 160　　C. 180　　D. 460

2. 某图书馆统计了某个月前 8 天纸质图书的借阅情况，整理数据得到如下折线图．根据折线图，下列结论正确的是(　)



A. 这 8 天里，每天图书借出数的极差大于 50

B. 这 8 天里，每天图书借出数的平均数大于 105

C. 这 8 天里，每天图书借出数的中位数大于 101

D. 前 4 天图书借出数的方差小于后 4 天图书借出数的方差

3. 设$\vec{a},\vec{b}$为两个夹角为$\frac{\pi}{3}$的单位向量，且$\vec{a}$与$\vec{a}+\lambda\vec{b}$的夹角为锐角，则实数λ的取值范围是 (　)

A. $(-2,0)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$　　C. $[-2,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-2,0)$

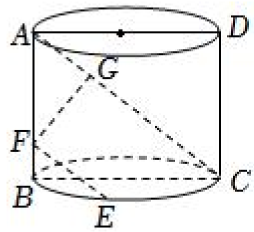
4. 若 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，$\beta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$，则$\alpha+\beta$的值是(　　)

A. $\frac{7\pi}{4}$　　B. $\frac{9\pi}{4}$　　C. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{9\pi}{4}$

5.有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则(　)

A. 甲与丙相互独立　　B. 甲与丁相互独立　C. 乙与丙相互独立　D. 丙与丁相互独立

6. 如图，某圆柱的一个轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$，点 E 在下底面圆周上，且$BC=2BE$，点 F 在母线 AB 上，点 G 是线段 AC 的靠近点 A 的四等分点，则$EF+FG$的最小值为(　)



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

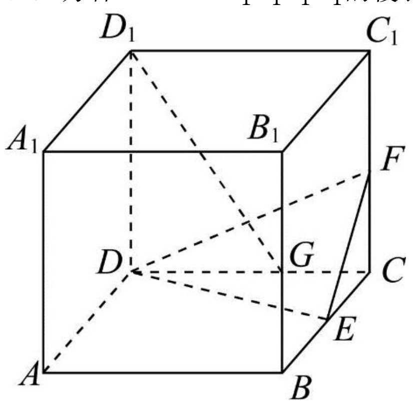
B. 3

C. 4

D. $\frac{9}{2}$

二、多选题

7. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1的中点．则(　)



A. 正方体体积是三棱锥$D-EFC$体积的 24 倍

B. 直线D_1G与平面 DEF 平行

C. 平面 DEF 截正方体所得的截面面积为$\frac{3}{2}$

D. 三棱锥$C-DEF$与在棱锥$G-DEF$的体积相等

8. 著名数学家欧拉曾提出如下定理：三角形的外心、重心、垂心依次在一条直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半.此直线称为欧拉线.该定理称为欧拉线定理.已知$\triangle ABC$的外心为 O，重心为 G，垂心为 H，且$AB=6$，$AC=4$，以下结论正确的是(　)

A. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{20}{3}$

B. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=10$

C. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

D. 若$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{7}$，则$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{14}{3}$

三、填空题

9. 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若$b=2$，$\cos 2A+\left(4+\sqrt{3}\right)\sin(B+C)=2\sqrt{3}+1$，点 P 是$\triangle ABC$的重心，且$AP=\frac{2\sqrt{7}}{3}$，则$a=$__________.

10. 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle BAD=60^\circ$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，已知点 M 在线段 EF 上，且$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，则$|\overrightarrow{AM}|=$__________，若点 N 为线段 BD 上一个动点，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}$的最小值为__________.

四、解答题

11. 已知复数：$z_1=1+2i, z_2=2-i$.

(1)求$z_1+\frac{1}{z_2}$;

(2)在复平面内，O 为原点，复数z_1, z_2, z分别对应向量$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$，且$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$共线，$|z|=2|z_1-z_2|$，求$z$.

12.$\triangle ABC$中，角A, B, C所对的边分别为 a，b，c，$\vec{m}=(\sin A, \sin B-\sin C)$，$\vec{n}=(a-b, b+c)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$.

(1)求角 C 的值；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-b$的取值范围.

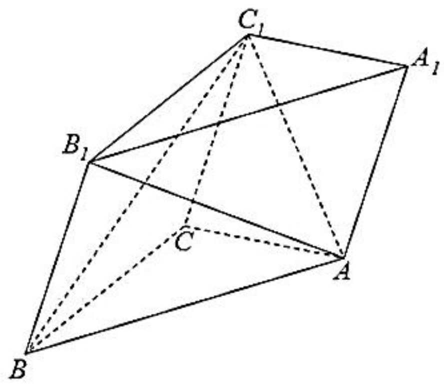
13. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1是菱形，$AC\perp BC_1$.

(1)求证：$BC_1\perp AB_1$；

(2)若侧面ACC_1A_1为矩形，$AC=\sqrt{3}$，$BC=2$.

①求证：平面$ACC_1A_1\perp$平面BCC_1B_1；

②求直线AC_1与平面BCC_1B_1所成角的正切值.



14.已知函数$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}\omega x)\cos(\frac{1}{2}\omega x+\varphi)$，$\omega>0$，$|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$.

(1)当$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$时，

①求$f(x)$的单调递增区间;

②当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，关于x的方程 $10[f(x)]^2-(10m+1)f(x)+m=0$ 恰有 4 个不同的实数根，求m的取值范围.

(2)函数$g(x)=f(x)+\sin\varphi$，$x=-\frac{\pi}{4}$是$g(x)$的零点，直线$x=\frac{\pi}{4}$是$g(x)$图象的对称轴，且$g(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$上单调，求$\omega$的最大值.

江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期期末复习卷（3）

一、单选题

1. 某学校采用分层随机抽样方法，抽取一定数量的高中学生参加安全知识竞赛.若得到的样本中高二的学生数量比高一多40人、比高三少20人，且全校高一、高三学生数之比为$2:3$，则样本容量为(　)

A. 120　　　　B. 160　　　　C. 180　　　　D. 460

【答案】D

【解答】

解：设抽取高二的人数为x，

则高一人数为$x-40$，高三人数为$x+20$，

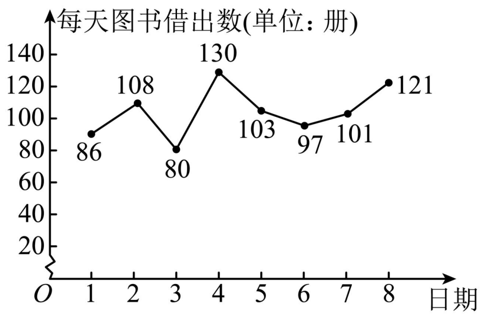
依题意，得$\frac{x-40}{x+20}=\frac{2}{3}$,

解得：$x=160$，

则样本容量为：$160+160-40+160+20=460$.

故选D.

2. 某图书馆统计了某个月前8天纸质图书的借阅情况，整理数据得到如下折线图．根据折线图，下列结论正确的是(　)



A. 这8天里，每天图书借出数的极差大于50

B. 这8天里，每天图书借出数的平均数大于105

C. 这8天里，每天图书借出数的中位数大于101

D. 前4天图书借出数的方差小于后4天图书借出数的方差

【答案】C

【解答】

解：A：每天图书借出数的极差为$130-80=50$，错；

B：每天图书借出数的平均数$\frac{86+108+80+130+103+97+101+121}{8}=\frac{413}{4}<105$，错；

C：由数据从小到大排序为$80,86,97,101,103,108,121,130$，则中位数为$\frac{101+103}{2}=102>101$，对；

D：前 4 天平均数 $\frac{86+108+80+130}{4}=101$，则方差为 $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i-101)^2=389$，

后 4 天平均数 $\frac{103+97+101+121}{4}=105.5$，则方差为 $\frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8}(x_i-105.5)^2=84.75$，

所以前 4 天图书借出数的方差大于后 4 天图书借出数的方差，错.

故选：C

3. 设$\vec{a},\vec{b}$为两个夹角为$\frac{\pi}{3}$的单位向量，*且*$\vec{a}$*与*$\vec{a}+\lambda\vec{b}$的夹角为锐角，则实数λ的取值范围是 (　)

A. $(-2,0)\cup(0,+\infty)$　　　　B. $(-2,+\infty)$

C. $[-2,0)\cup(0,+\infty)$　　　　D. $(-2,0)$

【答案】A

【解答】

解：设$\vec{a}$与$\vec{a}+\lambda\vec{b}$的夹角为α，

$\because\ \vec{a}$与$\vec{a}+\lambda\vec{b}$的夹角为锐角，

$\therefore\ cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}>0$，

又$\because\ \vec{a},\vec{b}$为两个夹角为$\frac{\pi}{3}$的单位向量，

则$\frac{|\vec{a}|^2+\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\frac{\pi}{3}}{|\vec{a}||\vec{b}|}>0$，

即 $1+\frac{1}{2}\lambda>0$，解得$\lambda>-2$，

当$\lambda=0$ 时，$\vec{a}$与$\vec{a}+\lambda\vec{b}$所成夹角为 $0°$，故应舍去.

$\therefore$实数λ的取值范围是$(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

故答案选：A.

4. 若 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，$\beta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$，则$\alpha+\beta$的值是(　　)

A. $\frac{7\pi}{4}$　　　B. $\frac{9\pi}{4}$　　　C. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$　　　D. $\frac{5\pi}{4}$或$\frac{9\pi}{4}$

【答案】A

【解答】

解：$\because\ \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha>0$,

$\therefore\ \sin\alpha,\cos\alpha$符号相同，

又$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$, $\therefore\ \alpha\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, $2\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi]$,

由 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$可得 $\cos2\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

又$\beta \in [\pi,\frac{3\pi}{2}]$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}>0$，$\therefore \beta-\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi)$,

$\therefore \cos(\beta-\alpha)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha+(\beta-\alpha)]=\cos2\alpha\cos(\beta-\alpha)-\sin2\alpha\sin(\beta-\alpha)$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,$\beta \in [\pi,\frac{3\pi}{2}]$，得$\alpha+\beta \in [\frac{5\pi}{4},2\pi]$,

$\therefore \alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$,

故选 A.

5.有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则(   )

A. 甲与丙相互独立　　B. 甲与丁相互独立　C. 乙与丙相互独立　D. 丙与丁相互独立

【答案】B

【解答】

解：由题意可知，两点数和为 8 的所有可能为：(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)，

两点数和为 7 的所有可能为(1,6)，(2,5)，(3,4)，(4,3)，(5,2)，(6,1)，

$P(\text{甲})=\frac{1}{6}$，$P(\text{乙})=\frac{1}{6}$，$P(\text{丙})=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$，$P(\text{丁})=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$,

A：$P(\text{甲丙})=0\neq P(\text{甲})P(\text{丙})$,

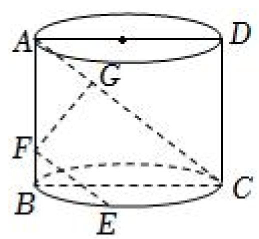
B：$P(\text{甲丁})=\frac{1}{36}=P(\text{甲})P(\text{丁})$,

C：$P(\text{乙丙})=\frac{1}{36}\neq P(\text{乙})P(\text{丙})$,

D：$P(\text{丙丁})=0\neq P(\text{丙})P(\text{丁})$,

故选：B.

6. 如图，某圆柱的一个轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$，点 E 在下底面圆周上，且$BC=2BE$，点 F 在母线 AB 上，点 G 是线段 AC 的靠近点 A 的四等分点，则$EF+FG$的最小值为(   )



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. 3

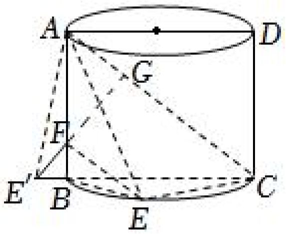
C. 4

D. $\frac{9}{2}$

【答案】A

【解答】

解：将$\triangle ABE$绕直线AB旋转到ABE'，并且点E'在BC的反向延长线上，连接$E'G$，交AB于点F，此时$EF+FG$最小，如图所示：



因为$AB=BC=2$，所以$\angle ACB=\frac{\pi}{4}$,

又因为$BC=2BE$，所以$BE=1$，

又因为$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，所以$CG=\frac{3}{4}AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$E'C=E'B+BC=3$，

由余弦定理得，$E'G^2=E'C^2+CG^2-2E'C\cdot CG\cdot\cos\angle ACB$

$=9+\frac{9}{2}-2\times3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$,

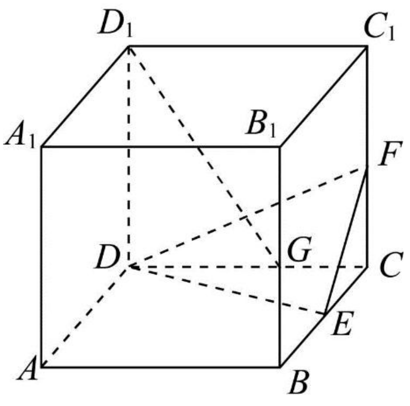
解得$E'G=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

故$EF+FG$的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

二、多选题

7. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E，F，G分别为BC，CC_1，BB_1的中点．则(　)



A. 正方体体积是三棱锥$D-EFC$体积的24倍

B. 直线D_1G与平面DEF平行

C. 平面DEF截正方体所得的截面面积为$\frac{3}{2}$

D. 三棱锥$C-DEF$与在棱锥$G-DEF$的体积相等

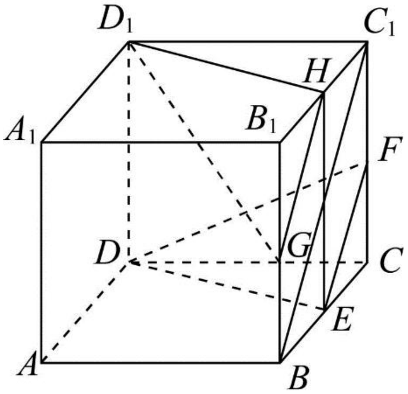
【答案】ABC

【解答】

解：对于 A，$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=2\times2\times2=8$，$V_{D-EFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ECF}\cdot DC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$，

$\therefore$正方体体积是三棱锥$D-EFC$体积的 24 倍，故 A 正确；

对于 B，



取B_1C_1的中点 H，连接 EH，可得四边形DD_1HE为平行四边形，则$D_1H//DE$，

$\because DE\subset$平面 DEF，$D_1H\not\subset$平面 DEF，$\therefore D_1H//$平面 DEF，

又$EF//BC_1$，$GH//BC_1$，$\therefore GH//EF$，

$\because EF\subset$平面 DEF，$GH\not\subset$平面 DEF，$\therefore GH//$平面 DEF，

而$D_1H\cap GH=H$，$\therefore$平面$D_1GH//$平面 DEF，

$\because D_1G\subset$平面D_1GH，$\therefore$直线D_1G与平面 DEF 平行，故 B 正确；

对于 C，在等腰三角形 DEF 中，$DE=DF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，则 EF 边上的高为$\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$平面 DEF 截正方体所得的截面面积为$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$，故 C 正确；

对于 D，$\because GH//EF$，$\therefore V_{G-DEF}=V_{H-DEF}=V_{D-EFH}=2V_{D-CEF}=2V_{C-DEF}$，故 D 错误.

故选：ABC.

8. 著名数学家欧拉曾提出如下定理：三角形的外心、重心、垂心依次在一条直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半.此直线称为欧拉线.该定理称为欧拉线定理.已知$\triangle ABC$的外心为 O，重心为 G，垂心为 H，且$AB=6$，$AC=4$，以下结论正确的是(   )

A. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{20}{3}$

B. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=10$

C. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

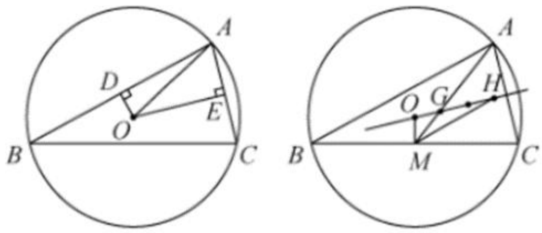
D. 若$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{7}$，则$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{14}{3}$

【答案】ACD

【解答】

解：由点 G 是$\triangle ABC$的重心，可得$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=-\frac{20}{3}$，故 A 项正确；



图(1)　　图(2)

过$\triangle ABC$的外心 O 分别作 AB、AC 的垂线，垂足为 D、E，如图(1)，

易知点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，

则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle OAE-|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle OAD$

$=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=-10$，故 B 项错误；

因为点 G 是$\triangle ABC$的重心，所以$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，

故$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})$

$=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$，

由欧拉线定理可得$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，则$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，故 C 项正确；

对 D 选项，作$OM\perp BC$于 M，则 M 为 BC 中点，

$AB=6$，$AC=4$，$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{7}$，

由余弦定理可得 $\cos C=\frac{16+28-36}{2\times4\times2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，则 $\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

设外接圆半径为 R，则 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{6}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$，即$|OB|^2=R^2=\frac{28}{3}$，

则$|OM|^2=|OB|^2-|BM|^2=\frac{7}{3}$，

则$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|OM|^2-|BM|^2=\frac{7}{3}-7=-\frac{14}{3}$，故 D 项正确.

三、填空题

9. 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若$b=2$，$\cos2A+(4+\sqrt{3})\sin(B+C)=2\sqrt{3}+1$，点 P 是$\triangle ABC$的重心，且$AP=\frac{2\sqrt{7}}{3}$，则$a=$__________.

【答案】$2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{13}$

【解答】

解：$\because \cos 2A+\left(4+\sqrt{3}\right)\sin(B+C)=2\sqrt{3}+1$，

$\therefore 1-2sin^2A+\left(4+\sqrt{3}\right)\sin A=2\sqrt{3}+1$

整理得 $2sin^2A-\left(4+\sqrt{3}\right)\sin A+2\sqrt{3}=0$，

解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin A=2$ (舍去)，

$\because 0<A<\pi$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ 或 $A=\frac{2\pi}{3}$.

又$\because$点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore \overrightarrow{AP}^2=\dfrac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A)$

$\because |AP|=\frac{2\sqrt{7}}{3}$，$b=2$，

整理得 $c^2+4c\cos A-24=0$.

当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$c^2+2c-24=0$，得 $c=4$，负值舍去.

此时 $a^2=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}$，

解得 $a=2\sqrt{3}$；

当 $A=\frac{2\pi}{3}$ 时，$c^2-2c-24=0$，得 $c=6$，负值舍去.

此时 $a^2=4+36-2\times2\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得 $a=2\sqrt{13}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{13}$.

10. 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle BAD=60^\circ$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，已知点 M 在线段 EF 上，且$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，则$|\overrightarrow{AM}|=$__________，若点 N 为线段 BD 上一个动点，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}$的最小值为__________.

【答案】7 ； $-\frac{37}{4}$

【解答】

解：设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EF}$.则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD})$

$=(1-\frac{2}{3}\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1+2\lambda}{3}\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以$\begin{cases}1-\frac{2\lambda}{3}=x\\ \frac{1+2\lambda}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$，解得$\lambda=\frac{1}{4}$，$x=\frac{5}{6}$，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;

平方可得$\overrightarrow{AM}^2=\frac{25}{36}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2+\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=25+9+\frac{5}{6}\times6\times6\times\frac{1}{2}=49$，

所以$|\overrightarrow{AM}|=7$.

设$\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+x(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=(\dfrac{1}{6}-x)\overrightarrow{AB}+(x-\dfrac{1}{2})\overrightarrow{AD}$;

所以$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}=(1-x)(\frac{1}{6}-x)\overrightarrow{AB}^2+x(x-\frac{1}{2})\overrightarrow{AD}^2+[x(\frac{1}{6}-x)+(1-x)(x-\frac{1}{2})]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

整理可得$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}=36(x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{12})$，当$x=\frac{5}{12}$时，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}$取到最小值$-\frac{37}{4}$.

故答案为：7；$-\frac{37}{4}$.

四、解答题

11. 已知复数：$z_1=1+2i,z_2=2-i$.

(1)求$z_1+\frac{1}{z_2}$;

(2)在复平面内，O为原点，复数z_1,z_2,z分别对应向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$，且$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$共线，$|z|=2|z_1-z_2|$，求$z$.

【答案】解：(1)$z_1+\frac{1}{z_2}=1+2i+\frac{1}{2-i}=1+2i+\frac{2+i}{5}=\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i$.

(2)由题可得，$A(1,2),B(2,-1)$，

设$z=a+bi,(a,b\in R)$，则$C(a,b)$，

所以$\overrightarrow{OC}=(a,b)$，$\overrightarrow{AB}=(1,-3)$，

因为$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$共线，所以$3a+b=0$，①，

又因为$z_1-z_2=-1+3i$，且$|z|=2|z_1-z_2|$，

所以$\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}$，即$a^2+b^2=40$，②，

联立①②解得，$\begin{cases}a=2\\b=-6\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=6\end{cases}$，

所以$z=2-6i$或$z=-2+6i$.

12.在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a，b，c，$\vec{m}=(\sin A,\sin B-\sin C)$，$\vec{n}=(a-b,b+c)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$.

(1)求角C的值；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-b$的取值范围.

【答案】解：(1)因为$\vec{m}=(\sin A,\sin B-\sin C)$，$\vec{n}=(a-b,b+c)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$，

所以$\sin A(a-b)+(\sin B-\sin C)(b+c)=0$，

利用正弦定理化简得：

$a(a-b)+(b-c)(b+c)=0$，即$a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,

又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$;

(2)由(1)得$A+B=\frac{2\pi}{3}$，即$B=\frac{2\pi}{3}-A$，

又因为$\triangle ABC$锐角三角形，

所以$\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}\\0<A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$,

因为$c=1$，由正弦定理得：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

所以$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A$，$b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$，

所以$\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sin A-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{3}+A)$

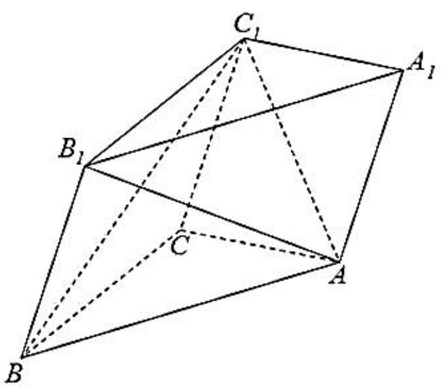
$=\sin A-\cos A=\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})$,

因为$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}<A-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,

所以$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})<1$，

故$\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-b$的取值范围为$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},1\right)$.

13. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1是菱形，$AC\perp BC_1$.



(1)求证：$BC_1\perp AB_1$；

(2)若侧面ACC_1A_1为矩形，$AC=\sqrt{3}$，$BC=2$.

①求证：平面$ACC_1A_1\perp$平面BCC_1B_1；

②求直线AC_1与平面BCC_1B_1所成角的正切值.

【答案】解：(1)连接B_1C，

∵侧面BCC_1B_1是菱形，$\therefore B_1C\perp BC_1$，

又$AC\perp BC_1$，$B_1C\cap AC=C$，$B_1C\subset$平面ACB_1，$AC\subset$平面ACB_1，

$\therefore BC_1\perp$平面ACB_1，

$\because AB_1\subset$平面ACB_1，

$\therefore BC_1\perp AB_1$.

(2)①∵侧面ACC_1A_1为矩形，$\therefore AC\perp CC_1$，

$\because AC\perp BC_1$，$BC_1\cap CC_1=C_1$，$CC_1\subset$平面BCC_1B_1，$BC_1\subset$平面BCC_1B_1，

$\therefore AC\perp$平面BCC_1B_1，

$\because AC\subset$平面ACC_1A_1，∴平面$ACC_1A_1\perp$平面BCC_1B_1.

②$\because AC\perp$平面BCC_1B_1，$\therefore AC_1$在平面BCC_1B_1上的射影为CC_1，

∴直线AC_1与平面BCC_1B_1所成角为$\angle AC_1C$，

$\therefore \tan\angle AC_1C=\dfrac{AC}{CC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

14.已知函数$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}\omega x)\cos(\frac{1}{2}\omega x+\varphi)$，$\omega>0$，$|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$.

(1)当$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$时，

①求$f(x)$的单调递增区间;

②当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，关于x的方程 $10[f(x)]^2-(10m+1)f(x)+m=0$ 恰有 4 个不同的实数根，求m的取值范围.

(2)函数$g(x)=f(x)+\sin\varphi$，$x=-\frac{\pi}{4}$是$g(x)$的零点，直线$x=\frac{\pi}{4}$是$g(x)$图象的对称轴，且$g(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$上单调，求$\omega$的最大值.

【答案】解：(1) ①$f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})$

$=2\sin x(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得$k\pi-\frac{5\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$.

故$f(x)$的单调递增区间为$[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}](k\in Z)$.

②当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{12}]$上单调递增，在$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$上单调递减，

$f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{12})=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{\pi}{2})=-\sqrt{3}$，

故当$t\in[0,1-\frac{\sqrt{3}}{2})$时，$f(x)=t$有 2 个不同的实数根.

由 $10[f(x)]^2-(10m+1)f(x)+m=0$，可得$f(x)=\frac{1}{10}$或$m$.

因为$f(x)=\frac{1}{10}$有 2 个不同的实数根，所以$f(x)=m$有 2 个不同的实数根，且$m\neq\frac{1}{10}$.

故m的取值范围为$[0,\frac{1}{10})\cup(\frac{1}{10},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(2)由题意可得$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)-\sin\varphi$，$g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$.

因为$x=-\frac{\pi}{4}$为$g(x)$的零点，直线$x=\frac{\pi}{4}$为$g(x)$图象的对称轴，

所以$-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi$ ①，$\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$ ②，k_1，$k_2\in Z$.

②$-$ ①得，$\frac{\pi}{2}\omega=(k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}$，所以$\omega=2(k_2-k_1)+1$.

因为k_1，$k_2\in Z$，所以$\omega=2n+1(n\in N)$，即ω为正奇数.

因为$g(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$上单调，则$\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{12}\leq\frac{T}{2}$，即$T=\frac{2\pi}{\omega}\geq\frac{\pi}{6}$，解得$\omega\leq12$.

当$\omega=11$ 时，$-\frac{11\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$.

因为$|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时$g(x)=\sin(11x-\frac{\pi}{4})$.

当$x\in(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$时，$(11x-\frac{\pi}{4})\in(\frac{13\pi}{36},\frac{23\pi}{18})$，

所以当$x\in(\frac{\pi}{18},\frac{3\pi}{44})$时，$g(x)$单调递增，当$x\in(\frac{3\pi}{44},\frac{5\pi}{36})$时，$g(x)$单调递减，

即$g(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$上不单调，不满足题意.

当$\omega=9$ 时，$-\frac{9\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$.

因为$|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时$g(x)=\sin(9x+\frac{\pi}{4})$.

当$x\in(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$时，$(9x+\frac{\pi}{4})\in(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$，

此时$g(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$上单调递减，符合题意.

故ω的最大值为 9.