2023~2024 学年度第二学期高一数学周末练习 11 答案

一、单选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数$z = 1 + 2i$，则$\overline{z}(1 - i) =($　$)$

A. $-1 + 3i$　　B. $3 - i$　　C. $-1 - 3i$　　D. $3 + i$

【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查复数的乘法运算，属于基础题.

利用共轭复数的概念及复数的运算法则求解即可.

【解答】

解：$\because z = 1 + 2i$，

$\therefore \overline{z} = 1 - 2i$，

$\therefore \overline{z}(1 - i) = (1 - 2i)(1 - i) =- 1 - 3i$.

故选：C.

2. 某工厂生产A，B，C三种不同型号的产品，某月生产A，B，C这三种型号的产品的数量之比为$1:a:2$，现用分层抽样的方法抽取一个容量为 60 的样本，已知B种型号的产品被抽取 30 件，则a的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查分层抽样的应用，解题时要认真审题，注意分层抽样性质的合理运用，属于基础题.

由抽样数求出抽样比，即可求出a的值.

【解答】

解：由题可知$\frac{30}{60} = \frac{a}{a+3}$，解得$a = 3$.

故选 C.

3. 一组数据 27，12，15，14，31，17，19，23 的第 70 百分位数是(　)

A. 17　　B. 19　　C. 23　　D. 31

【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查百分位数的定义，属于基础题.

由百分位数的定义求解即可.

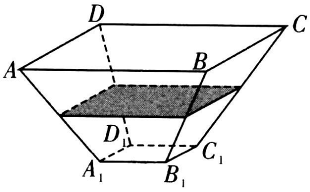
【解答】

解：将数据从小到大排列可得：12，14，15，17，19，23，27，31 共 8 个数，

则 $8\times70\%=5.6$，则该组数据的第 70 百分位数是第六个数，即 23.

故选：C.

4.“方斗”常作为盛米的一种容器，其形状是一个上大下小的正四棱台，现有“方斗”容器如图所示，已知$AB=4$，$A_1B_1=2$，现往容器里加米，当米的高度是“方斗”高度的一半时，用米 38 kg，则该“方斗”可盛米的总质量为



A. 74 kg　　B. 114 kg　　C. 76 kg　　D. 112 kg

【答案】D

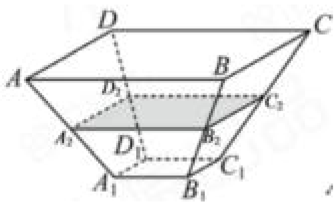
【解析】【分析】

本题主要考查棱台的体积，属于基础题.

设线段AA_1,BB_1,CC_1,DD_1的中点分别为A_2,B_2,C_2,D_2，利用台体的体积公式计算出棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$与棱台$A_1B_1C_1D_1-A_2B_2C_2D_2$的体积之比.即可得出原“方斗“可盛米的总质量。

【解答】

解：设线段AA_1，BB_1，CC_1，DD_1的中点分别为A_2，B_2，C_2，D_2，如下图所示;



易知四边形AA_1B_1B为等腰梯形，因为线段AA_1、BB_1的中点分别为A_2，B_2，

则$A_2B_2=\frac{AB+A_1B_1}{2}=\frac{4+2}{2}=3$，

设棱台$A_1B_1C_1D_1-A_2B_2C_2D_2$的高为$h$，体积为$V_1$，

则棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的高为 $2h$.设其体积为V.

则$V_1=\frac{1}{3}(2^2+3^2+2\times3)h=\frac{19}{3}h$，则$V=\frac{1}{3}(4^2+2^2+2\times4)\cdot2h=\frac{56}{3}h$，

所以$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{56h}{3}}{\frac{19h}{3}}=\frac{56}{19}$，所以，该“方斗“可盛米的总质量为$\frac{56}{19}\times38=112kg$.

故法：D

二、多选题：本题共 2 小题，共 10 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

5. 对于一组数据 2，3，3，4，6，6，8，8，则 (　)

A. 极差为 8　　　　B. 平均数为 5　　　　C. 方差为$\frac{19}{4}$　　　　D. 40 百分位数是 4

【答案】BCD

【解析】【分析】

本题主要考查样本与总体的数字特征，属于基础题.

分别求出数据的极差、平均数，方差以及 40 百分位数即可判断.

【解答】

解：根据题意可知，

这组数据中极差为 $8-2=6$，A错；

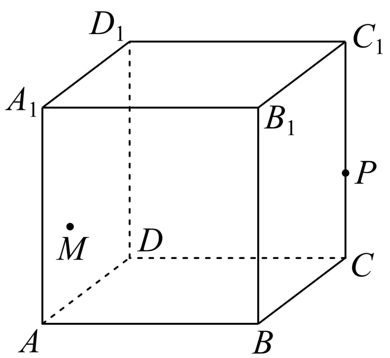
平均数为$\frac{2+3+3+4+6+6+8+8}{8}=5$，$B$对；

通过计算知，方差为$s^2=\frac{1}{8}[(2-5)^2+(3-5)^2+\ldots\ldots+(8-5)^2]=\frac{19}{4}$，$C$对；

由 $8\times0.4=3.2$，是第四位数，所以 40 百分位数是 4，D对.

故答案为BCD.

6. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点M是其侧面ADD_1A_1上的动点(含边界)，点P是线段CC_1上的动点，下列结论正确的是 (　)



A. 存在点P，M，使得平面B_1D_1M与平面PBD平行

B. 当点P为CC_1中点时，过A,P,D_1点的平面截该正方体所得的截面是梯形

C. 过点A，P，M的 平面截该正方体所得的截面图形不可能为五边形

D. 当P为棱CC_1的中点且$PM=2\sqrt{2}$时，则点M的轨迹长度为$\frac{2\pi}{3}$

【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查面面平行的判定，空间几何体的截面问题以及与圆相关的轨迹问题，属于较难题.

找到点P，M使得平面B_1D_1M与平面PBD平行判断选项A；

作出过A,P,D_1点的平面截该正方体所得的截面判断选项B；

作出过点A，P，M的平面截该正方体所得的截面图形为五边形否定选项C；

求得点M的轨迹长度判断选项D.

【解答】

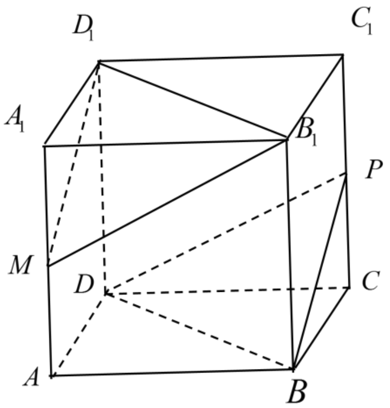
解：对于A选项，当M为AA_1中点，P为CC_1中点时，

连接B_1D_1、B_1M、D_1M、PB、PD、BD，

因为$BD//B_1D_1$，又$BD\subset$平面PBD，$B_1D_1\not\subset$平面PBD，则$B_1D_1//$平面PBD，

因为$B_1M//PD$，又$PD\subset$平面PBD，$B_1M\not\subset$平面PBD，则$B_1M//$平面PBD，

又$B_1M\cap B_1D_1=B_1$，$B_1D_1,B_1M\subset$平面B_1D_1M，则平面$B_1D_1M//$平面PBD，故A正确；

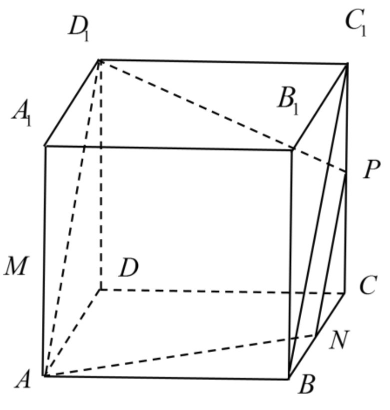


对于B选项，取BC中点N，连接PN、NA、AD_1、PD_1、BC_1

则$NP//BC_1$，$AD_1//BC_1$，则$AD_1//NP$，又$AD_1\neq PN$，

则四边形AD_1PN为梯形.

则梯形AD_1PN为截面，故B正确；



对于C选项，当M为A_1D_1中点，P为CC_1中点时，

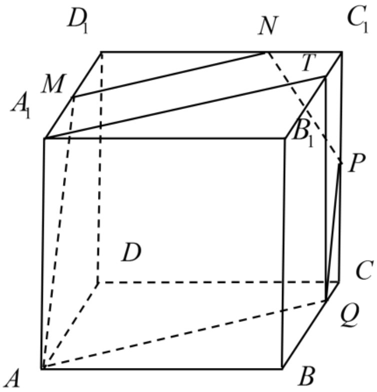
在BC上取点Q，使$CQ=\frac{1}{4}CB$，在B_1C_1上取点T，使$C_1T=\frac{1}{4}C_1B_1$，

连接A_1T、QT，则$QT\underline{\underline{//}}AA_1$，则四边形$TQAA_1$为平行四边形，则$TA_1//QA$

在平面$A_1B_1C_1D_1$内过点M作$MN//A_1T$，交C_1D_1于N，则$MN//AQ$，

连接AM、AQ、PQ、NQ，易证$PQ//MA$，

则五边形$AMNPQ$为过点A，P，M的平面截该正方体所得的截面，故C判断错误；



对于D选项，取DD_1中点E，连接PE，ME，PM，

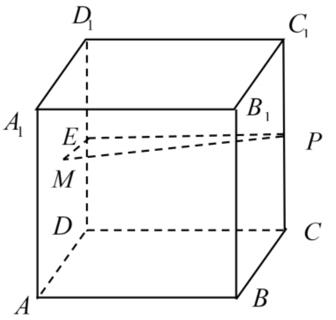
则$PE\perp$平面AA_1D_1D，又$ME\subset$平面AA_1D_1D，

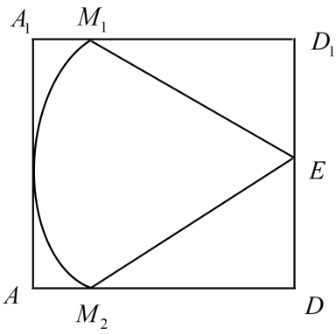
所以$PE\perp ME$，则$ME=\sqrt{PM^2-PE^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2^2}=2$，

则点M在侧面AA_1D_1D内运动轨迹为以E为圆心半径为 2 的劣弧，

分别交AD、A_1D_1于M_2、M_1，则$\angle M_1ED_1=\angle M_2ED=\frac{\pi}{3}$,

则$\angle M_1EM_2=\frac{\pi}{3}$，劣弧$\overset{\frown}{M_1M_2}$的长为$\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$.故$D$正确.





故选：ABD

三、填空题：本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分。

7. 某工厂利用随机数表对生产的 700 个零件进行抽样测试，先将 700 个零件进行编号，001，002，……，699，700.从中抽取 70 个样本，若从下图提供随机数表中第 2 行第 6 列开始向右读取数据，则得到的第 4 个样本编号是_____.

32 21 18 34 29 78 64 54 07 32 52 42 06 44 38 12 23 43 56 77 35 78 90 56 42

84 42 12 53 31 34 57 86 07 36 25 30 07 32 86 23 45 78 89 07 23 68 96 08 04

32 56 78 08 43 67 89 53 55 77 34 89 94 83 75 22 53 55 78 32 45 77 89 23 45

【答案】007

【解析】【分析】

本题考查了随机数表法抽取样本数据的应用问题，是基础题.

根据随机数表法依次取出满足条件的样本编号即可.

【解答】

解：从图中提供随机数表的第 2 行第 6 列开始向右读取数据，依次为:

253，313，457，860(舍去)，736(舍去)，253(舍去)，007，...;

所以得到的第 4 个样本编号是 007.

故答案为：007.

8. 已知圆锥的高为 2，体积为 8π，若该圆锥顶点和底面圆周上所有点都在同一个球面上，则此球的体积为_____.

【答案】$\frac{256}{3}\pi$

【解析】【分析】

本题考查球的切、接问题，属于中档题.

首先由已知求得圆锥底面半径，再设球的半径为R，根据圆锥的几何特征，可得关于R的方程，解出半径，则球的体积可求.

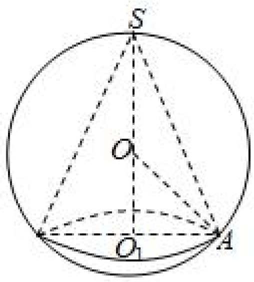
【解答】

解：设圆锥的底面半径为r，圆锥的高为h，

因为圆锥的高为 2，体积为 8π，所以$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 8\pi$，

即$\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times 2 = 8\pi$，解得$r = 2\sqrt{3}$，

当圆锥顶点与底面在球心O的两侧时，如图，

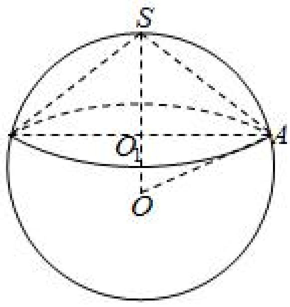


圆锥SO_1的底面半径$O_1A=2\sqrt{3}$，高$SO_1=2$，

设球O的半径为R，则$(2-R)^2+(2\sqrt{3})^2=R^2$，

解得$R=4$，与$R<2$ 不符，故此种情况舍去；

当圆锥顶点与底面在球心O的同侧时，如图，



圆锥SO_1的底面半径$O_1A=2\sqrt{3}$，高$SO_1=2$，

设球O的半径为R，则$(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2=R^2$，

解得$R=4$.

综上，此球的半径为 4，

球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{256}{3}\pi$.

四、解答题：本题共 4 小题，共 58 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

9. (本小题 13 分)

已知$\vec{a}=(1,2\sin\theta)$，$\vec{b}=\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),1\right)$，$\theta\in R$.

(1)若$\vec{a}\perp\vec{b}$，求 $\tan\theta$的值；

(2)若$\vec{a}//\vec{b}$，求 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

【答案】解：(1)因为$\vec{a}=(1,2\sin\theta)$，$\vec{b}=\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),1\right)$，

因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\theta=0$，

展开可得 $\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}+2\sin\theta=\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=0$，

若 $\cos\theta=0$，则 $\sin\theta=0$，这与$sin^2\theta+cos^2\theta=1$ 矛盾，

所以，$\cos\theta\neq 0$，因此，$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2)因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以，$2\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，

展开得 $2\sin\theta\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $2sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=2$，

即 $1-\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta=2$，即 $1+2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$，解得 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

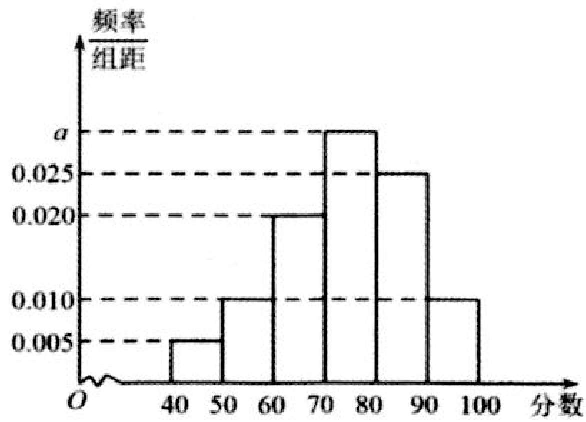
【解析】本题考查向量平行和垂直的数量积的向量表示，三角恒等变换的综合应用，属于中档题.

(1)由题意可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，利用两角和的正弦公式可得出关于 $\sin\theta$、$\cos\theta$的等式，即可解得 $\tan\theta$的值;

(2)由平面向量共线的坐标表示可得出 $2\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，利用三角恒等变换化简可得出 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

10. (本小题 15 分)

文明城市是反映城市整体文明水平的综合性荣誉称号，作为普通市民，既是文明城市的最大受益者，更是文明城市的主要创造者.某市为提高市民对文明城市创建的认识，举办了“创建文明城市”知识竞赛，从所有答卷中随机抽取 100 份作为样本，将样本的成绩(满分 100 分，成绩均为不低于 40 分的整数)分成六段：[40,50)，[50,60)，…，[90,100]得到如图所示的频率分布直方图.



(1)求频率分布直方图中a的值;

(2)求样本成绩的第 75 百分位数;

(3)已知落在[50,60)的平均成绩是 61，方差是 7，落在[60,70)的平均成绩为 70，方差是 4，求两组成绩的总平均数$\bar{z}$和总方差s^2.

【答案】解：(1) $\because$每组小矩形的面积之和为 1，

$\therefore (0.005+0.010+0.020+a+0.025+0.010)\times 10=1$，

$\therefore a=0.030$；

(2)成绩落在$[40,80)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020+0.030)\times 10=0.65$，

落在$[40,90)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020+0.030+0.025)\times 10=0.9$，

设第 75 百分位数为m，

由 $0.65+(m-80)\times 0.025=0.75$，

得$m=84$，故第 75 百分位数为 84；

(3)由图可知，成绩在$[50,60)$的市民人数为 $100\times 0.1=10$，

成绩在$[60,70)$的市民人数为 $100\times 0.2=20$，

故$\overline{z}=\frac{10\times 61+70\times 20}{10+20}=67$，

设成绩在$[50,60)$中 10 人的分数分别为x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_{10}；

成绩在$[60,70)$中 20 人的分数分别为y_1，y_2，y_3，$\cdots$，y_{20}，

则由题意可得，$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2}{10}-61^2=7$，$\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2}{20}-70^2=4$，

即$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=37280$，$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2=98080$，

$\therefore s^2=\frac{1}{10+20}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2)-\overline{z}^2$

$=\frac{1}{30}\times(37280+98080)-67^2=23$，

所以两组市民成绩的总平均数是 67，总方差是 23.

【解析】本题考查频率分布直方图、百分位数、平均数、方差等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

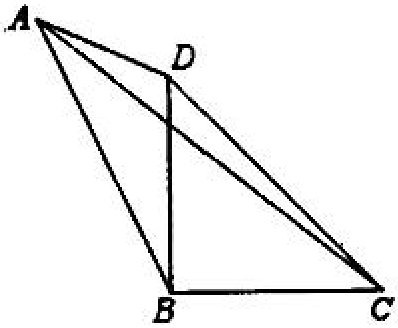
(1)由频率分布直方图列出方程能求出a；

(2)由频率分布直方图列出方程能求出第 75 百分位数；

(3)由频率分布直方图中数据结合方差计算公式即可解答.

11. (本小题 15 分)

在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$，$AB=7$.



(1)若$BD=5$，求$\triangle ABD$的面积；

(2)若$BC\perp BD$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$BC=\frac{35}{8}$，求 $\sin\angle ABD$.

【答案】解：(1)在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot cos\angle ADB$，

即$7^2=AD^2+5^2-2AD\times 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，整理得$AD^2+5AD-24=0$，

解得$AD=3$，或$AD=-8$(舍去)，

所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times AD\times BD\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

(2)设$\angle ABD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$，则$\angle BCA=\pi-\frac{\pi}{6}-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\theta$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，即$\frac{7}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{\frac{35}{8}}{\sin\frac{\pi}{6}}$所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{4}{5}$.

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$，则 $0<\frac{\pi}{3}-\theta<\frac{\pi}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\theta=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]=\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)-\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

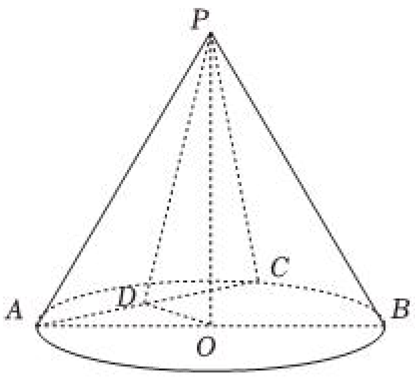
【解析】本题考查正弦定理，余弦定理，三角形面积公式，两角和与差的三角函数公式的应用，属于中档题.

(1)由余弦定理解得AD，代入三角形面积公式即可得解；

(2)设$\angle ABD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$，则$\angle BCA=\frac{\pi}{3}-\theta$.由正弦定理解得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{4}{5}$，再根据 $\sin\theta=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]$即可得解.

12. (本小题 15 分)

如图，在圆锥PO中，已知$PO\perp$底面$\odot O$，$PO=\sqrt{2}$，$\odot O$的直径$AB=2$，C是$\widehat{AB}$的中点，D为AC的中点.

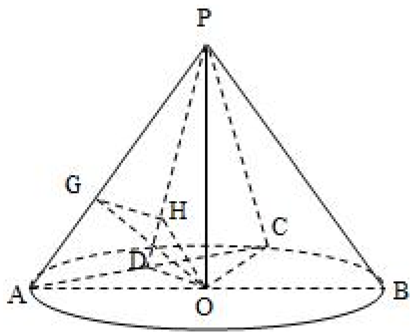


(1)证明：平面$POD\perp$平面PAC；

(2)求三棱锥$D-PBC$的体积；

(3)求二面角$B-PA-C$的余弦值．

【答案】解：(1)证明：连接OC，



$\because OA=OC$，D是AC的中点

$\therefore AC\perp OD$

又$\because PO\perp$底面$\odot O$，$AC\subset$底面$\odot O$

$\therefore AC\perp PO$

$\because OD$、PO是平面POD内的两条相交直线

$\therefore AC\perp$平面POD，

而$AC\subset$平面PAC

$\therefore$平面$POD\perp$平面PAC；

(2)根据题意可得三棱锥$D-PBC$的体积$V_{D-PBC}=V_{P-DBC}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$；

(3)在平面POD中，过O作$OH\perp PD$于H，

由(I)知，平面$POD\perp$平面PAC，平面$POD\cap$平面$PAC=PD$，$OH\subset$平面POD

所以$OH\perp$平面PAC，

又$\because PA\subset$平面PAC，$\therefore PA\perp HO$，

在平面PAO中，过O作$OG\perp PA$于G，连接GH，

则有$PA\perp$平面OGH，$GH\subset$平面OGH，从而$PA\perp HG$.

故$\angle OGH$为二面角$B-PA-C$的平面角，

在$Rt\triangle ODA$中，$OD=OA\cdot sin45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

在$Rt\triangle ODP$中，$OH=\frac{PO\cdot OD}{\sqrt{PO^2+OD^2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

在$Rt\triangle OPA$中，$OG=\frac{PO\cdot OA}{\sqrt{PO^2+OA^2}}=\frac{\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{2+1}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

在$Rt\triangle OGH$中，$\sin\angle OGH=\frac{OH}{OG}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

所以 $\cos\angle OGH=\sqrt{1-\sin^2\angle OGH}=\sqrt{1-\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

故二面角$B-PA-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】本题考查面面垂直的证明，三棱锥的体积的求解，二面角的求解，属中档题.

(1)连接OC，先根据$\triangle AOC$是等腰直角三角形证出中线$OD\perp AC$，再结合$PO\perp AC$证出$AC\perp POD$，利用平面与平面垂直的判定定理，可证出平面$POD\perp$平面PAC；

(2)转化三棱锥的顶点与底面，即可求解；

(3)过O分别作$OH\perp PD$于H，$OG\perp PA$于G，再连接GH，根据三垂线定理证明$\angle OGH$为二面角$B-PA-C$的平面角，最后分别在$Rt\triangle ODA$、$Rt\triangle ODP$、$Rt\triangle OPA$中计算出OH、OG和 $\sin\angle OGH$，最后求出所求二面角的余弦值.