

2022-2023 学年度第二学期期末调研测试

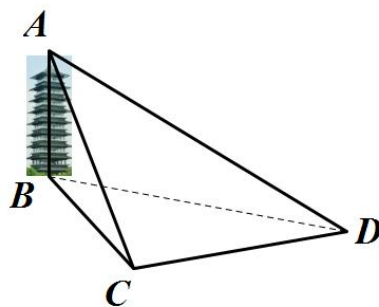
高一数学(A)

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

2023 年 6 月

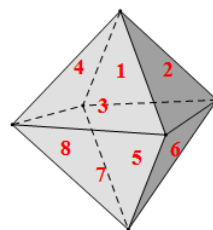
一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 满足 $zi = 2 - i$ (i 为虚数单位), 则 z 在复平面上所对应的点位于 ().
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知一组数据分别是 2.65, 2.68, 2.68, 2.72, 2.73, 2.75, 2.80, 2.80, 2.82, 2.83, 则它们的 75 百分位数为 ().
A. 2.75 B. 2.80 C. 2.81 D. 2.82
3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $A = 30^\circ$, $a = 5$, $b = 6$, 求角 B 时, 解的情况是 ().
A. 无解 B. 一解 C. 两解 D. 无数解
4. 已知向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 60° , $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{a}| =$ ().
A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$ D. 以上都不对
5. 已知 l, m 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列命题正确的是 ().
A. 若 $l \parallel \alpha$, $m \perp \alpha$, 则 $l \perp m$ B. 若 $l \perp m$, $m \perp \alpha$, 则 $l \parallel \alpha$
C. 若 $l \subset \alpha$, $m \subset \alpha$, $l \parallel \beta$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \parallel \beta$, $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, 则 $l \parallel m$
6. 如图, 大运塔是扬州首座以钢结构为主体建设的直塔, 为扬州中国大运河博物馆的主体建筑之一. 小强同学学以致用, 欲测量大运塔 AB 的高度. 他选取与塔底 B 在同一水平面内的两个观测点 C, D , 测得 $\angle BCD = 120^\circ$, $CD = 112\text{m}$, 在 C, D 两观测点处测得大运塔顶部 A 的仰角分别为 $45^\circ, 30^\circ$, 则大运塔 AB 的高为 ().
A. $56\sqrt{2}\text{m}$ B. 112m C. $112\sqrt{2}\text{m}$ D. $112\sqrt{3}\text{m}$



7. 已知 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{3}) =$ ().
- A. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ B. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ 或 $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

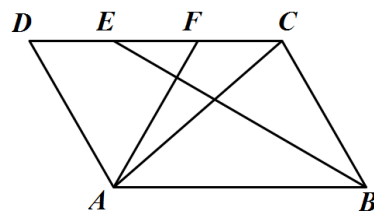
8. 如图, 在一个质地均匀的正八面体木块的八个面上分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8. 连续抛掷这个正八面体木块两次, 并记录每次正八面体与地面接触的面上的数字, 记“第一次记录的数字为奇数”为事件 A , “第二次记录的数字为偶数”为事件 B , “两次记录的数字之和为奇数”为事件 C , 则下列结论正确的是 ().



- A. B 与 C 是互斥事件 B. A 与 B 不是相互独立事件
C. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ D. A 与 C 是相互独立事件

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 CD 边上的两个三等分点, 则下列选项正确的有 ().



- A. $\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ B. $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
C. $\overline{BE} = \overline{CB} - \overline{CE}$ D. $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AC}$

10. 从甲厂和乙厂生产的同一种产品中各抽取 10 件, 对其使用寿命 (单位: 年) 的检测结果如下表:

| | | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 甲厂产品 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 |
| 乙厂产品 | 4 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |

记甲工厂样本使用寿命的众数为 x_1 , 平均数为 x_2 , 极差为 x_3 , 方差为 x_4 ; 乙工厂样本使用寿命的众数为 y_1 , 平均数为 y_2 , 极差为 y_3 , 方差为 y_4 . 则下列选项正确的有 ().

- A. $x_1 < y_1$ B. $x_2 = y_2$ C. $x_3 < y_3$ D. $x_4 > y_4$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = \frac{2\pi}{3}$, AD 为 $\angle A$ 的内角平分线且 $AD = 2$, 则下列选项正确的有 ().

- A. $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AD}$ B. $BC^2 - 2AC \cdot AB = 16$
C. $AB \cdot AC - DB \cdot DC = 4$ D. $\triangle ABC$ 的面积最小值为 $4\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \omega x) - 2\sin^2 \omega x + 1$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 3 个不同零点, 则下列选项正确的有 ().

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 条对称轴 B. $f(x)$ 的最小正周期不可能是 $\frac{\pi}{2}$
C. ω 的取值范围是 $[\frac{11}{8}, \frac{15}{8})$ D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{16})$ 上单调递增

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，双空题第一空 2 分，第二空 3 分。

13. 已知非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 45° ， $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$ ，向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上投影向量为 \vec{c} ，则 $|\vec{c}|=$ ▲ 。

14. 写出一个同时具有下列两个性质的复数 $z=$ ▲ 。

性质 1: $|z-\bar{z}|=2$ 性质 2: $z\cdot\bar{z}=4$

15. 已知角 α 的终边经过点 $P(\cos 50^\circ, \sin 50^\circ)$ ，且满足 $\sqrt{3}(\tan \alpha + \tan 2\alpha) + x \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha = -1$ ，则实数 $x=$ ▲ 。

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ （含边界）上一个动点，直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° ，则 PC_1 的取值范围为 ▲ ；当 PC_1 取得最小值时，四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为 ▲ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，计 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 10 分）

已知向量 $\vec{a}=(2,x)$ ， $\vec{b}=(x-1,1)$ ， $x\in\mathbf{R}$ 。

(1) 若 $x=4$ ，试判断 \vec{a} ， \vec{b} 能否构成平面的一组基底？并请说明理由。

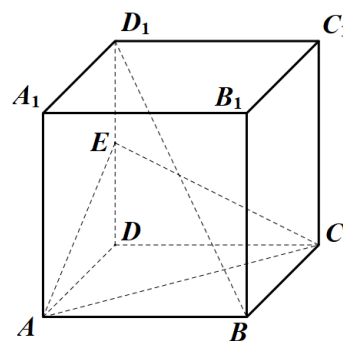
(2) 若 $\vec{c}=(2,-6)$ ，且 $\vec{c}\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ ，求 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角大小。

18. （本小题满分 12 分）

如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 DD_1 的中点。

(1) 求证： $BD_1\parallel$ 平面 EAC ；

(2) 求点 D 到平面 EAC 的距离。



19. （本小题满分 12 分）

某村为响应国家乡村振兴战略，扎实推动乡村产业，提高村民收益，种植了一批琯溪蜜柚。现为了更好地销售，从该村的蜜柚树上随机摘下了 100 个蜜柚进行测重，测得其质量（单位：千克）均分布在区间 $[1.5,7.5]$ 内，并绘制了如图所示的频率分布直方图：

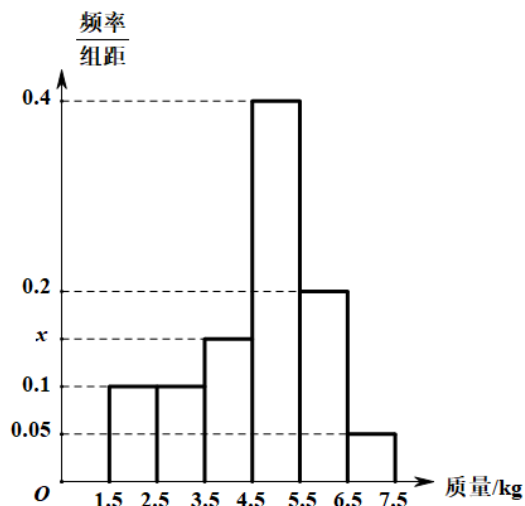
(1) 按分层随机抽样的方法从质量落在区间 $[2.5,3.5)$ ， $[3.5,4.5)$ 的蜜柚中随机抽取 5 个，再从这 5 个蜜柚中随机抽取 2 个，求这 2 个蜜柚质量至少有一个小于 3.5 千克的概率；

(2) 以各组数据的中间数值代表这组数据的平均水平, 以频率代表概率, 已知该村的蜜柚树上大约还有 5 000 个蜜柚待出售, 某电商提出两种收购方案:

A. 所有蜜柚均以 20 元/千克收购;

B. 低于 4.5 千克的蜜柚以 70 元/个的价格收购, 高于或等于 4.5 千克的蜜柚以 90 元/个的价格收购.

请你通过计算为该村选择收益最好的方案.



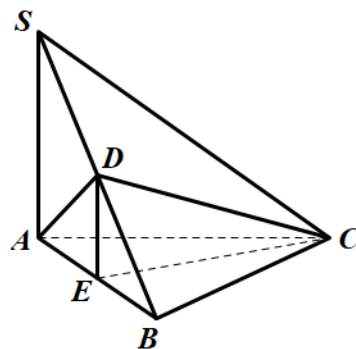
20. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 平面 $SAB \perp$ 平面 SBC , $\angle CBA = 90^\circ$, $SA = AB = BC = 2$, $SC = 2\sqrt{3}$,

D 、 E 分别为 SB 、 AB 的中点.

(1) 求证: $SB \perp BC$;

(2) 求二面角 $E-DC-B$ 的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $(a-c)(\sin A + \sin C) = (a-b)\sin B$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 D 是边 AB 的三等分点 (靠近点 A), $CD = tAD$. 求实数 t 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 2b\sin 2x - 2, (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$

(1) 若 $a = 1, b = 0$, 证明: 函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上有且仅有 1 个零点;

(2) 若对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 $a+b$ 的最大值和最小值.