江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期期末复习卷（4）

一、单选题

1. 若$a = \cos 50^\circ \cos 128^\circ + \cos 40^\circ \cos 38^\circ$，$b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56^\circ - \cos 56^\circ)$，$c = \frac{1 - tan^2 40^\circ 30'}{1 + tan^2 40^\circ 30'}$，$d = \frac{1}{2}(\cos 80^\circ - 2cos^2 50^\circ + 1)$，则$a$，$b$，$c$，$d$的大小关系为 (　)

A. $a > b > d > c$　　B. $b > a > d > c$　　C. $d > a > b > c$　　D. $c > a > d > b$

2. 已知向量$\vec{a} = (2,1)$，$\vec{b} = (\lambda, 3)$，若向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量$\vec{c} = (10,5)$，
则$|\vec{b} - 2\vec{a}| =$(　)

A. 7　　B. $3\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $5\sqrt{2}$

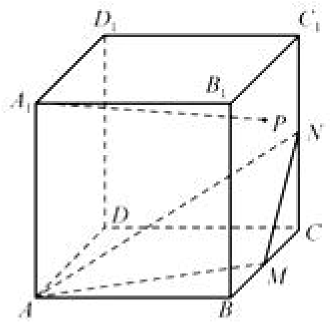
3. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\frac{b - c\cos A}{a - c\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}$，则$\triangle ABC$的形状是 (　)

A. 等腰或直角三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形

4. 已知A为锐角，$\tan 2A = \frac{\cos A}{2 - \sin A}$，$\tan(A - B) = \frac{2\sqrt{15}}{15}$，则 $\tan B =$(　)

A. $-\frac{\sqrt{15}}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{17}$　　C. $-\frac{2\sqrt{15}}{17}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{17}$

5. 已知正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，M，N分别是棱BC，CC_1的中点，动点P在正方形BCC_1B_1(包括边界)内运动，若$PA_1//$面AMN，则线段PA_1的长度范围是(　)



A. $[2, \sqrt{5}]$　　B. $[2,3]$

C. $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right]$　　D. $[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{5}]$

6. 已知函数$f(x) = \begin{cases} 4\sin \pi x, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}f(x-1), x > 1 \end{cases}$，若函数$y = f^2(x) + 2af(x) + 2 - a$在$[0, +\infty)$有 6 个不同零点，则实数$a$的取值范围是 (　)

A. $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{18}{7}, -2\right)$　　B$\left(-\infty, -\frac{18}{7}\right) \cup (1, +\infty)$

C. $(-3, -2) \cup \left(1, \frac{18}{7}\right)$　　D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

二、多选题

7. 设z_1，z_2，z_3为复数，$z_1 \ne 0$.下列命题中正确的是(　)

A. 若$|z_1| = |z_2|$，则$|z_1z_3| = |z_2z_3|$　　B. 若$z_1z_2 = z_1z_3$，则$z_2 = z_3$

C. 若$z_1 = \bar{z}_2$，则$\bar{z}_1 = z_2$　　D. 若$z_1^2 + z_2^2 > 0$，则$z_1^2 > -z_2^2$

8. 袋内有除颜色外其它属性都相同的 3 个黑球和 2 个白球，则下列选项正确的是 (　)

A. 有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次摸到白球的概率是$\frac{3}{5}$

B. 有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{18}{125}$

C. 不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次摸到白球的概率是$\frac{2}{5}$

D. 不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{1}{5}$

三、填空题

9. 湖州地区甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为 3: 2: 1，三所学校共有数学强基学生 48 人，在一次统一考试中，所有学生的成绩平均分为 117，方差为 21.5.已知甲、乙两所学校的数学强基小组学生的平均分分别为 118 和 114，方差分别为 15 和 21，则丙学校的学生成绩的方差是__________.

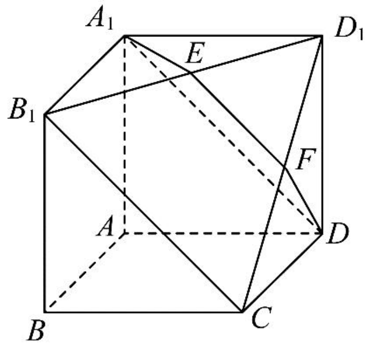
10. 正四棱台上、下底面的边长分别为 2，4，且侧面积等于两底面面积之和，则该棱台的体积是__________.

四、解答题

11.如图所示，在多面体$ABCD - A_1B_1D_1$中，四边形AA_1B_1B，ADD_1A_1，$ABCD$均为边长为 2 的正方形，E为B_1D_1的中点，过A_1，D，E的平面交CD_1于点F.

(1)证明：$EF//B_1C$.

(2)求三棱锥$C - DEF$的体积.



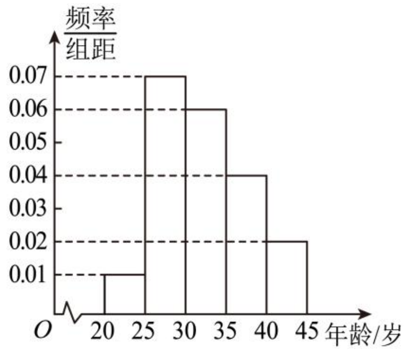
12. 2022 年 4 月 16 日，神舟十三号载人飞船返回舱成功着陆，航天员翟志刚、王亚平、叶光富完成在轨驻留半年的太空飞行任务，标志着中国空间站关键技术验证阶段圆满完成，并将进入建造阶段．某地区为了激发人们对天文学的兴趣，开展了天文知识比赛，满分 100 分(95 分及以上为认知程度高)，结果认知程度高的有m人，这m人按年龄分成 5 组，其中第一组：[20,25)，第二组：[25,30)，第三组：[30,35)，第四组：[35,40)，第五组：[40,45]，得到如图所示的频率分布直方图，已知第一组有 10 人．

(1)根据频率分布直方图，估计这m人的第 80 百分位数；

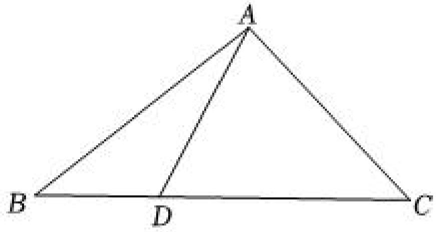
(2)现从以上各组中用分层随机抽样的方法抽取 20 人，担任“党章党史”的宣传使者．

①若有甲(年龄 36)，乙(年龄 42)两人已确定入选宣传使者，现计划从第四组和第五组被抽到的使者中，再随机抽取 2 名作为组长，求甲、乙两人至少有一人被选上当组长的概率；

②若第四组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 36 和$\frac{5}{2}$，第五组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 42 和 1，据此估计这m人中 35 ~ 45 岁所有人的年龄的平均数和方差．



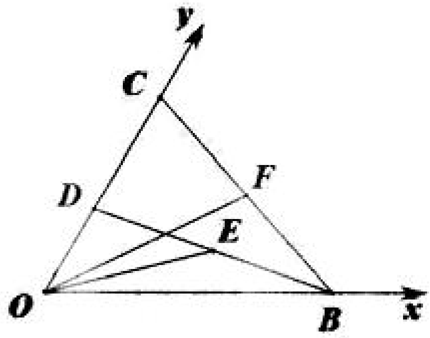
13.蜀绣又名“川绣”，与苏绣，湘绣，粤绣齐名，为中国四大名绣之一，蜀绣以其明丽清秀的色彩和精湛细腻的针法形成了自身的独特的韵味，丰富程度居四大名绣之首.1915 年，蜀绣在国际巴拿马赛中荣获巴拿马国际金奖，在绣品中有一类具有特殊比例的手巾呈如图所示的三角形状，点 D 为边 BC 上靠近 B 点的三等分点，$\angle ADC = 60°$，$AD = 2$.



(1)若$\angle ACD = 45°$，求三角形手巾的面积；

(2)当$\frac{AC}{AB}$取最小值时，请帮设计师计算 BD 的长.

14.如图，设Ox，Oy是平面内相交成$\alpha(0<\alpha<\pi)$的两条射线，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$分别为Ox，Oy同向的单位向量，定义平面坐标系xOy为$\alpha-$仿射坐标系.在$\alpha-$仿射坐标系中，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则记$\overrightarrow{OP}=(x,y)$.



(1)在$\alpha-$仿射坐标系中

①若$\vec{a}=(m,n)$，求$|\vec{a}|$;

②若$\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(-3,1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求 $\cos\alpha$;

(2)如图所示，在$\frac{\pi}{3}-$仿射坐标系中，B，C分别在x轴，y轴正半轴上，$|\overrightarrow{BC}|=1$，$\overrightarrow{OD}=\frac{7}{19}\overrightarrow{OC}$，$E$，$F$分别为$BD$，$BC$中点，求$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$的最大值.

江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期期末复习卷（4）

一、单选题

1. 若$a=\cos 50^{\circ}\cos 128^{\circ}+\cos 40^{\circ}\cos 38^{\circ}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56^{\circ}-\cos 56^{\circ})$，$c=\frac{1-tan^{2}40^{\circ}30^{'}}{1+tan^{2}40^{\circ}30^{'}}$，$d=\frac{1}{2}(\cos 80^{\circ}-2cos^{2}50^{\circ}+1)$，则$a$，$b$，$c$，$d$的大小关系为(　)

A. $a>b>d>c$　　B. $b>a>d>c$　　C. $d>a>b>c$　　D. $c>a>d>b$

【答案】A

【解答】

解：易知$a=\cos 50^{\circ}\cos 128^{\circ}+\cos 40^{\circ}\cos 38^{\circ}=-\sin 40^{\circ}\sin 38^{\circ}+\cos 40^{\circ}\cos 38^{\circ}$

$=\cos(40^{\circ}+38^{\circ})=\cos 78^{\circ}$；

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56^{\circ}-\cos 56^{\circ})=\sin 45^{\circ}\sin 56^{\circ}-\cos 45^{\circ}\cos 56^{\circ}$

$=-\cos(45^{\circ}+56^{\circ})=-\cos 101^{\circ}=\cos\ 79^{\circ}$;

$c=\frac{1-\frac{sin^{2}40^{\circ}30^{'}}{cos^{2}40^{\circ}30^{'}}}{1+\frac{sin^{2}40^{\circ}30^{'}}{cos^{2}40^{\circ}30^{'}}}=\frac{cos^{2}40^{\circ}30^{'}-sin^{2}40^{\circ}30^{'}}{cos^{2}40^{\circ}30^{'}+sin^{2}40^{\circ}30^{'}}=cos^{2}40^{\circ}30^{'}-sin^{2}40^{\circ}30^{'}=\cos\ 81^{\circ}$；

$d=\frac{1}{2}(\cos 80^{\circ}-2cos^{2}50^{\circ}+1)=\frac{1}{2}(\cos 80^{\circ}-\cos 100^{\circ})=\frac{1}{2}(\cos 80^{\circ}+\cos 80^{\circ})=\cos 80^{\circ}$；

由余弦函数$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，且$78^{\circ}<79^{\circ}<80^{\circ}<81^{\circ}$，

所以可得$\cos 78^{\circ}>\cos 79^{\circ}>\cos 80^{\circ}>\cos 81^{\circ}$，即$a>b>d>c$.

故选A.

2. 已知向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(\lambda,3)$，若向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量$\vec{c}=(10,5)$，

则$|\vec{b}-2\vec{a}|=$(　)

A. 7　　B. $3\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $5\sqrt{2}$

【答案】D

【解答】

解：向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(2,1)\cdot(\lambda,3)}{\sqrt{4+1}}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{4+1}}=\frac{(4\lambda+6,2\lambda+3)}{5}=\left(\frac{4}{5}\lambda+\frac{6}{5},\frac{2}{5}\lambda+\frac{3}{5}\right)$，

故$\frac{4}{5}\lambda+\frac{6}{5}=10$，$\frac{2}{5}\lambda+\frac{3}{5}=5$，解得$\lambda=11$，

所以$\vec{b}=(11,3)$，$\vec{b}-2\vec{a}=(11,3)-2(2,1)=(7,1)$，

故$|\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$.

故选：D

3. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\frac{b-c\cos A}{a-c\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，则$\triangle ABC$的形状是 (　)

A. 等腰或直角三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰直角三角形　D. 等腰三角形

【答案】D

【解答】

解：因为$\frac{b-c\cos A}{a-c\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$,

所以由正弦定理，得$\frac{b-c\cos A}{a-c\cos B}=\frac{b}{a}$,

所以$ab-ac\cos A=ab-bc\cos B$，

整理，得$a\cos A=b\cos B$，

再由正弦定理得$sinAcosA=sinBcosB$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$，

由三角形内角的性质可知 $2A,2B\in(0,2\pi)$，

所以 $2A=2B$或 $2A+2B=\pi$，

即$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$,

当$A+B=\frac{\pi}{2}$时，$C=\frac{\pi}{2}$，此时$c\cos B=a$，$a-c\cos B=0$，不符合题意，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

故选：D.

4. 已知A为锐角，$\tan 2A=\frac{\cos A}{2-\sin A}$，$\tan(A-B)=\frac{2\sqrt{15}}{15}$，则 $\tan B=$(　)

A. $-\frac{\sqrt{15}}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{17}$　　C. $-\frac{2\sqrt{15}}{17}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{17}$

【答案】A

【解答】

解：因为 $\tan 2A=\frac{\cos A}{2-\sin A}$，所以$\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\cos A}{2-\sin A}$,

所以$\frac{2\sin A\cos A}{1-2sin^2A}=\frac{\cos A}{2-\sin A}$,

又A为锐角，$\cos A>0$，

所以 $2\sin A(2-\sin A)=1-2sin^2A$，

解得 $\sin A=\frac{1}{4}$,

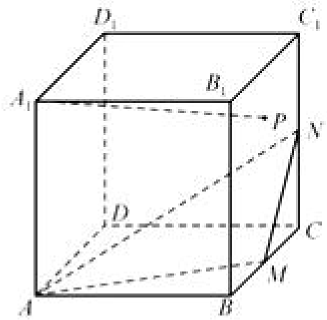
因为A为锐角，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan A=\frac{\sqrt{15}}{15}$,

又 $\tan(A-B)=\frac{2\sqrt{15}}{15}$,

所以 $\tan B=\tan[A-(A-B)]=\frac{\tan A-\tan(A-B)}{1+\tan A\tan(A-B)}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{15}-\frac{2\sqrt{15}}{15}}{1+\frac{\sqrt{15}}{15}\times\frac{2\sqrt{15}}{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{17}$.

故选：A.

5. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，M，N 分别是棱 BC，CC_1的中点，动点 P 在正方形BCC_1B_1(包括边界)内运动，若$PA_1//$面 AMN，则线段PA_1的长度范围是(　)



A. $[2,\sqrt{5}]$

B. $[2,3]$

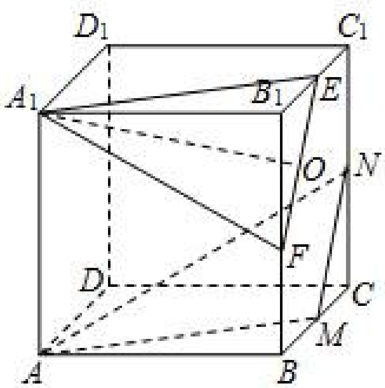
C. $[\frac{3\sqrt{2}}{2},3]$

D. $[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{5}]$

【答案】D

【解答】

解：取B_1C_1的中点 E，BB_1的中点 F，连接A_1E，A_1F，EF，取 EF 中点 O，连接A_1O，如图所示，



∵点 M，N 分别是棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中棱 BC，CC_1的中点，

$\therefore AM//A_1E$，$MN//EF$，

$\because AM\not\subset$平面A_1EF，$A_1E\subset$平面A_1EF，

$\therefore AM//$平面A_1EF，同理，$MN//$平面A_1EF，

$\because AM\cap MN=M$，AM，$MN\subset$平面 AMN，

∴平面$AMN//$平面A_1EF，

∵动点 P 在正方形BCC_1B_1(包括边界)内运动，且$PA_1//$面 AMN，

∴点 P 的轨迹是线段 EF，

$\because A_1E=A_1F=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore A_1O\perp EF$，

$\therefore$当 P 与 O 重合时，PA_1的长度取最小值为$A_1O=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

当 P 与E(或F)重合时，PA_1的长度取最大值为$A_1E=A_1F=\sqrt{5}$.

$\therefore$线段PA_1的长度范围为$[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{5}]$.

故选D.

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}4\sin\pi x,0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}f(x-1),x>1\end{cases}$，若函数$y=f^2(x)+2af(x)+2-a$在$[0,+\infty)$有 6 个不同零点，则实数$a$的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{18}{7},-2\right)$

B$\left(-\infty,-\frac{18}{7}\right)\cup(1,+\infty)$

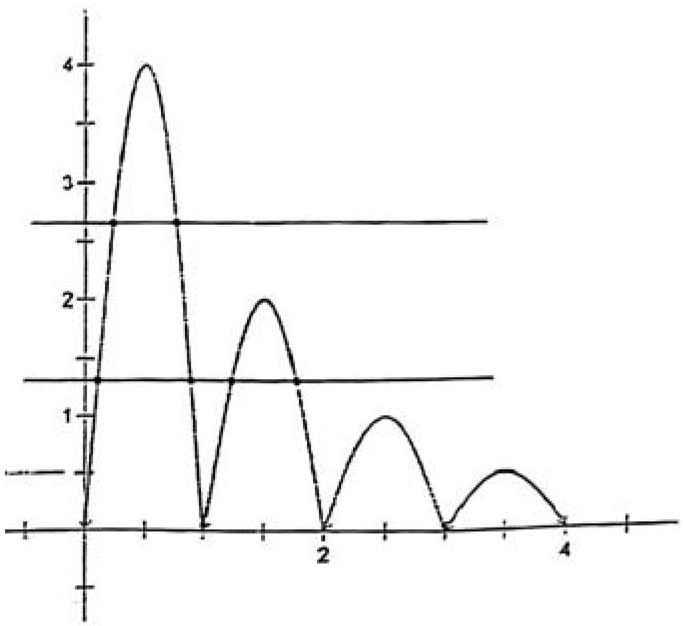
C. $(-3,-2)\cup\left(1,\frac{18}{7}\right)$

D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

【答案】A

【解答】

解：由题意，结合函数$f(x)$的图像，



函数$y=f^2(x)+2af(x)+2-a$在$[0,+\infty)$有 6 个不同零点，有以下四种可能：

①“方程$t^2+2at+2-a=0$ 有两个不同的实根t_1和t_2”

且“方程$t_1=f(x)$有两个根”且“方程$t_2=f(x)$有四个不同的实根”，

由函数$f(x)$的图像知，$t_1\in(2,4)$且$t_2\in(1,2)$，

令$\varphi(t)=t^2+2at+2-a$，

则需$\varphi(1)=1+2a+2-a>0$，$\varphi(2)=4+4a+2-a<0$，$\varphi(4)=16+8a+2-a>0$，

解得$-\frac{18}{7}<a<-2$，

②“方程$t^2+2at+2-a=0$ 有两个不同的实根t_1和t_2”

且“方程$t_1=f(x)$有零个根”且“方程$t_2=f(x)$有六个不同的实根”

由函数$f(x)$的图像知，$t_1\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$且$t_2\in(\frac{1}{2},1)$，

由于$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+a+2-a>0$，

则需$\begin{cases}\varphi(1)=1+2a+2-a<0\\ \varphi(4)=16+8a+2-a<0\end{cases}$，解得$a<-3$;

③“方程$t^2+2at+2-a=0$ 有两个不同的实根t_1和t_2”，

且“方程$t_1=f(x)$有 1 个根”且“方程$t_2=f(x)$有 5 个实根成立”，

则需$\begin{cases}\varphi(1)=1+2a+2-a=0\\ \varphi(4)=16+8a+2-a=0\end{cases}$此时无解;

④方程$t^2+2at+2-a=0$ 有且只有 1 个根t_0”且“方程$t_0=f(x)$有 6 个根”，计算$\triangle=4a^2+4a-8=0$

得$a=-2$ 或$a=1$，$t_0=2$ 或$t_0=-1$，不合题意，

综上所述：$-\frac{18}{7}<a<-2$ 或$a<-3$.

故选 A.

二、多选题

7. 设z_1，z_2，z_3为复数，$z_1\neq 0$.下列命题中正确的是(　)

A. 若$|z_1|=|z_2|$，则$|z_1z_3|=|z_2z_3|$

B. 若$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_2=z_3$

C. 若$z_1=\overline{z}_2$，则$\overline{z}_1=z_2$

D. 若$z_1^2+z_2^2>0$，则$z_1^2>-z_2^2$

【答案】ABC

【解答】

解：由复数模的性质，$|z_1z_3|=|z_1||z_3|=|z_2||z_3|=|z_2z_3|$，故 A 正确；

由于$z_1\neq 0$，令$z_4=\frac{1}{z_1}$，从而$z_4z_1z_2=z_4z_1z_3$，即$z_2=z_3$，故 B 正确；

由于共轭复数是相对的，即若$z_1=\overline{z}_2$，则$\overline{z}_1=z_2$，故 C 正确；

令$z_1=1+i,z_2=2-\frac{i}{2}$，则${z_1}^2+{z_2}^2=2i+4-\frac{1}{4}-2i=\frac{15}{4}>0$，

而${z_1}^2=2i$，$-{z_2}^2=2i-\frac{15}{4}$均为复数，不可比较大小，故 D 错误.

故选：ABC.

8. 袋内有除颜色外其它属性都相同的 3 个黑球和 2 个白球，则下列选项正确的是

(　)

A. 有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次摸到白球的概率是$\frac{3}{5}$

B. 有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{18}{125}$

C. 不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次摸到白球的概率是$\frac{2}{5}$

D. 不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{1}{5}$

【答案】BCD

【解答】

解：对于A，因为有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，

则每次摸到白球的概率是$\frac{2}{5}$，所以第 3 次摸到白球的概率是$\frac{2}{5}$，故 A 错误；

对于B，有放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{18}{125}$，故 B 正确；

对于C，不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次摸到白球包含(黑，黑，白)，(黑，白，白)，(白，黑，白)，

所求概率为$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$，故 C 正确；

对于D，不放回摸球 3 次，每次摸 1 球，则第 3 次才摸到白球的概率是$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$，故 D 正确.

故选 BCD.

三、填空题

9. 湖州地区甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为$3:2:1$，三所学校共有数学强基学生 48 人，在一次统一考试中，所有学生的成绩平均分为 117，方差为 21.5.已知甲、乙两所学校的数学强基小组学生的平均分分别为 118 和 114，方差分别为 15 和 21，则丙学校的学生成绩的方差是__________.

【答案】12

【解答】

解：甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为$3:2:1$，三所学校共有数学强基学生 48 人，

则甲校的数学强基小组人数 24；乙校的数学强基小组人数为 16；丙校的数学强基小组人数 8，

把甲校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{x}=118$，方差记为$s_x^2=15$；

把乙校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{y}=114$，方差记为$s_y^2=21$；

把丙校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{z}$，方差记为s_z^2；

把所有学生的平均分记为$\overline{\omega}=117$，方差记为$s^2=21.5$.

根据按比例分配分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系，

可得$\overline{\omega}=\frac{24}{48}\overline{x}+\frac{16}{48}\overline{y}+\frac{8}{48}\overline{z}$，即$117=\frac{24}{48}\times 118+\frac{16}{48}\times 114+\frac{8}{48}\overline{z}$，解得$\overline{z}=120$，

因此，$s^2=\frac{1}{48}\{24[s_x^2+(\overline{x}-\overline{\omega})^2]+16[s_y^2+(\overline{y}-\overline{\omega})^2]+8[s_z^2+(\overline{z}-\overline{\omega})^2]\}$，

即$21.5=\frac{1}{48}\{24\times[15+(118-117)^2]+16\times[21+(114-117)^2]+8\times[s_z^2+(120-117)^2]\}$，

解得$s_z^2=12$.

故答案为：12.

10. 正四棱台上、下底面的边长分别为2，4，且侧面积等于两底面面积之和，则该棱台的体积是

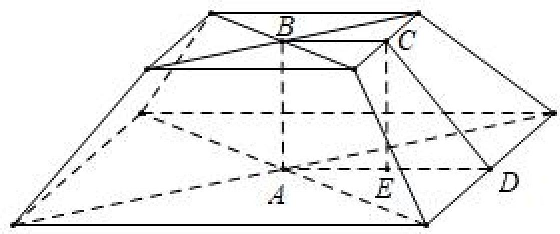
__________.

【答案】$\frac{112}{9}$

【解答】

解：设棱台的高为h，斜高为h'，

设A、B分别是棱台的底面中心，C、D分别为底面正方形边的中点，过C作$CE\perp AD$于E，



则$AB\overset{//}{=}CE$，$h'=CD$，$AB=CE=h$，

设棱台的上底面边长为a，下底面边长为b，则$a=2$，$b=4$，

∵棱台的侧面积等于两底面面积之和，

$\therefore 4\times\frac{1}{2}(2+4)h'=a^2+b^2$，得$h'=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{4+16}{2\times(2+4)}=\frac{5}{3}$,

$Rt\triangle CDE$中，$DE=AD-BC=\frac{1}{2}(b-a)=1$，

$\therefore CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{(\frac{5}{3})^2-1^2}=\frac{4}{3}$，即棱台的高$h=\frac{4}{3}$,

∴该棱台的体积$V=\frac{1}{3}(2^2+4^2+\sqrt{2^2\times 4^2})\times\frac{4}{3}=\frac{112}{9}$.

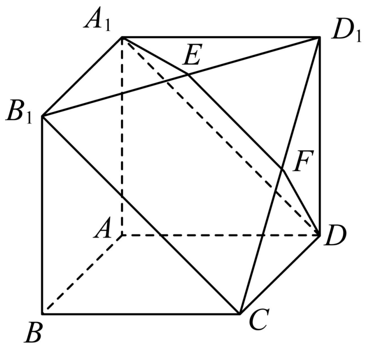
故答案为：$\frac{112}{9}$.

四、解答题

11.如图所示，在多面体$ABCD-A_1B_1D_1$中，四边形AA_1B_1B，ADD_1A_1，$ABCD$均为边长为2的正方形，E为B_1D_1的中点，过A_1，D，E的平面交CD_1于点F.

(1)证明：$EF//B_1C$.

(2)求三棱锥$C-DEF$的体积．



【答案】证明：(1) $\because A_1B_1//AB$，$AB//CD$，且$A_1B_1=AB$，$AB=CD$，

$\therefore A_1B_1//CD$，且$A_1B_1=CD$，

∴四边形A_1B_1CD为平行四边形，

$\therefore A_1D//B_1C$，又$A_1D\subset$平面A_1DFE，且$B_1C\not\subset$平面A_1DEF，

$\therefore B_1C//$平面A_1DFE．

又$B_1C\subset$平面B_1CD_1，平面$B_1CD_1\cap$平面$A_1DFE=EF$，

$\therefore EF//B_1C$.

解：(2) $\because E$为B_1D_1中点，

∴点E到平面CDD_1的距离d为点B_1到平面CDD_1距离的一半．

又根据题意易知：$AB_1//$平面CDD_1，

∴点B_1到平面CDD_1距离等于点A到平面CDD_1的距离$AD=2$，

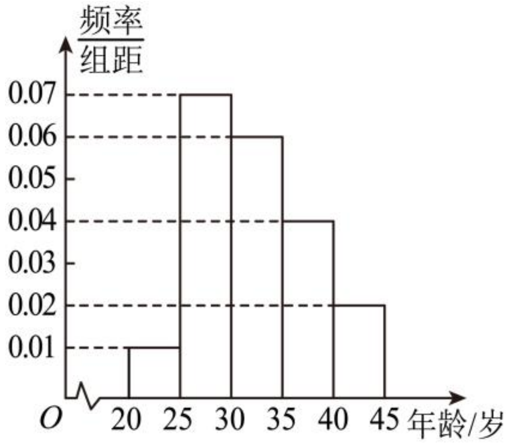
∴点E到平面CDD_1的距离$d=1$．

又$S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDD_1}=\frac{1}{4}\times 2\times 2=1$，

$\therefore V_{C-DEF}=V_{E-CDF}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDF}\cdot d=\frac{1}{3}$.

12. 2022 年 4 月 16 日，神舟十三号载人飞船返回舱成功着陆，航天员翟志刚、王亚平、叶光富完成在轨驻留半年的太空飞行任务，标志着中国空间站关键技术验证阶段圆满完成，并将进入建造阶段．某地区为了激发人们对天文学的兴趣，开展了天文知识比赛，满分 100 分(95 分及以上为认知程度高)，结果认知程度高的有m人，这m人按年龄分成 5 组，其中第一组：[20,25)，第二组：[25,30)，第三组：[30,35)，

第四组：[35,40)，第五组：[40,45]，得到如图所示的频率分布直方图，已知第一组有 10 人.



(1)根据频率分布直方图，估计这m人的第 80 百分位数；

(2)现从以上各组中用分层随机抽样的方法抽取 20 人，担任“党章党史”的宣传使者.

①若有甲(年龄 36)，乙(年龄 42)两人已确定入选宣传使者，现计划从第四组和第五组被抽到的使者中，再随机抽取 2 名作为组长，求甲、乙两人至少有一人被选上当组长的概率；

②若第四组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 36 和$\frac{5}{2}$，第五组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 42 和 1，据此估计这m人中 35 ~ 45 岁所有人的年龄的平均数和方差.

【答案】解：(1)设第 80 百分位数为a，

因为 $0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5=0.7<0.8$，

$0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5+0.04\times5=0.9>0.8$，

故a位于第四组：[35,40)内，

所以 $0.7+(a-35)\times0.04=0.8$，

解得$a=37.5$.

(2)①由题意得，第四组应抽取 $0.04\times5\times20=4$ 人，第五组抽取 $0.02\times5\times20=2$ 人，

设事件M为“甲、乙两人至少一人被选上组长”，

所以$P(M)=\frac{C_2^1C_4^1+C_2^2}{C_6^2}=\frac{3}{5}$.

②设第四组的宣传使者的年龄分别为x_1，x_2，x_3，x_4，平均数分别为$\bar{x}=36$，方差分别为$s_1^2=\frac{5}{2}$，

设第五组的宣传使者的年龄分别为y_1，y_2，平均数分别为$\bar{y}=42$，方差分别为$s_2^2=1$，

则$\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i,\bar{y}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}y_i$，

$$s_1^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2),$$

$s_2^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i-\bar{y})^2=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{2}y_i^2-2\bar{y}^2)$，

可得$\sum_{i=1}^{4}x_i=4\bar{x},\sum_{i=1}^{2}y_i=2\bar{y},\sum_{i=1}^{4}x_i^2=4s_1^2+4\bar{x}^2$,

$\sum_{i=1}^{2}y_i^2=2s_2^2+2\bar{y}^2$，

设第四组和第五组所有宣传使者的年龄平均数为$\bar{z}$，方差为s^2，

则$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{i=1}^{2}y_i}{6}=\frac{4\bar{x}+2\bar{y}}{6}=\frac{4\times36+2\times42}{6}=38$,

即第四组和第五组所有宣传使者的年龄平均数为 38 岁，

则$s^2=\frac{1}{6}[\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{z})^2+\sum_{i=1}^{2}(y_i-\bar{z})^2]$

$$=\frac{1}{6}[(\sum_{i=1}^{4}x_i^4-4\bar{z}^2)+(\sum_{i=1}^{2}y_i^4-2\bar{z}^2)]$$

$$=\frac{1}{6}(4s_1^2+4\bar{x}^2+2s_2^2+2\bar{y}^2-6\bar{z}^2)$$

$=\frac{1}{6}(4\times\frac{5}{2}+4\times36^2+2\times1^2+2\times42^2-6\times38^2)=10$，

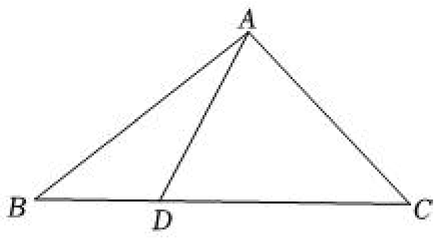
即第四组和第五组所有宣传使者的年龄方差为 10，

据此估计这m人中年龄在 35～45 岁的所有人的年龄平均数为 38，方差约为 10.

13.蜀绣又名“川绣”，与苏绣，湘绣，粤绣齐名，为中国四大名绣之一，蜀绣以其明丽清秀的色彩和精湛细腻的针法形成了自身的独特的韵味，丰富程度居四大名绣之首.1915 年，蜀绣在国际巴拿马赛中荣获巴拿马国际金奖，在绣品中有一类具有特殊比例的手巾呈如图所示的三角形状，点 D 为边 BC 上靠近 B 点的三等分点，$\angle ADC=60°$，$AD=2$.

(1)若$\angle ACD=45°$，求三角形手巾的面积;

(2)当$\frac{AC}{AB}$取最小值时，请帮设计师计算 BD 的长.



【答案】解：(1)在△ACD中，$\angle ACD=45°$，$\angle ADC=60°$，

故$\angle DAC=75°$，$\angle ADB=120°$，

由正弦定理得$\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$,

即$DC=\frac{2\times\sin75°}{\sin45°}$,

而 $\sin75°=\sin(30°+45°)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,

故$DC=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{3}$，

故$BD=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，

故三角形手巾的面积为

$$S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}AD\times DC\times\sin\angle ADC+\frac{1}{2}AD\times DB\times\sin\angle ADB$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9+3\sqrt{3}}{4}.$$

(2)设$BD=m(m>0)$，则$CD=2m$，

则在$\triangle ABD$中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB=m^2+4+2m$，

在$\triangle ACD$中，$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC=4m^2+4-4m$，

故$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4m^2+4-4m}{m^2+4+2m}=\frac{4(m^2+4+2m)-12(1+m)}{m^2+4+2m}$

$=4-\frac{12(1+m)}{m^2+4+2m}=4-\frac{12(1+m)}{(m+1)^2+3}=4-\frac{12}{(m+1)+\frac{3}{m+1}}$，

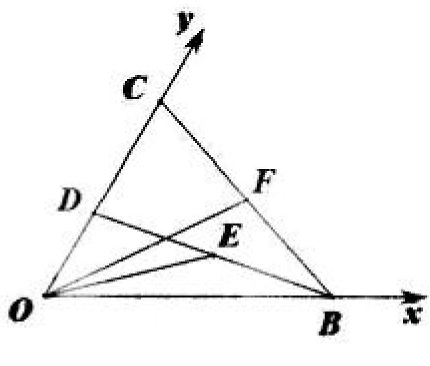
由于$(m+1)+\frac{3}{m+1}\geq 2\sqrt{(m+1)\cdot\frac{3}{m+1}}=2\sqrt{3}$，当且仅当$m+1=\frac{3}{m+1}$，即$m=\sqrt{3}-1$ 时取等号，

故 $4-\frac{12}{(m+1)+\frac{3}{m+1}}\geq 4-\frac{12}{2\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$，

即$\frac{AC^2}{AB^2}$取到最小值即$\frac{AC}{AB}$取最小值时，$m=\sqrt{3}-1$，

即此时$BD=\sqrt{3}-1$.

14.如图，设Ox，Oy是平面内相交成$\alpha(0<\alpha<\pi)$的两条射线，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$分别为Ox，Oy同向的单位向量，定义平面坐标系xOy为$\alpha-$仿射坐标系.在$\alpha-$仿射坐标系中，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则记$\overrightarrow{OP}=(x,y)$.



(1)在$\alpha-$仿射坐标系中

①若$\vec{a}=(m,n)$，求$|\vec{a}|$;

②若$\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(-3,1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求 $\cos\alpha$;

(2)如图所示，在$\frac{\pi}{3}$−仿射坐标系中，B，C分别在x轴，y轴正半轴上，$|\overrightarrow{BC}|=1$，$\overrightarrow{OD}=\frac{7}{19}\overrightarrow{OC}$，$E$，$F$分别为$BD$，$BC$中点，求$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$的最大值.

【答案】解：:(1) ①因为$\vec{a}=(m,n)$，$\vec{a}=m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_2}$，

$\vec{a}^2=(m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_2})^2=m^2\overrightarrow{e_1}^2+2mn\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+n^2\overrightarrow{e_2}^2=m^2+2mn\cos\alpha+n^2$，

所以$|\vec{a}|=\sqrt{m^2+2mn\cos\alpha+n^2}$，

②由$\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(-3,1)$，得$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2\times(-1)\times3\cos\alpha+3^2}=\sqrt{10-6\cos\alpha}$，

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+2\times(-3)\times1\times\cos\alpha+1^2}=\sqrt{10-6\cos\alpha}$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2})\cdot(-3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})=3\overrightarrow{e_1}^2+3\overrightarrow{e_2}^2-10\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=6-10\cos\alpha$，

因为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{6-10\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}=\frac{1}{2}$，得$\cos\alpha=\frac{1}{7}$;

(2)方法一：依题意设$B(m,0)$，$C(0,n)$，$(m>0,n>0)$

$\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，$BC=1$，$\overrightarrow{OD}=\frac{7}{19}\overrightarrow{OC}=(0,\frac{7}{19}n)$

因为F为BC中点，所以$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{e_2}$

E为BD中点，所以$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}OD+\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{7}{38}n\overrightarrow{e_2}$，

所以$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=(\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{e_2})\cdot(\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{7}{38}n\overrightarrow{e_2})=\frac{1}{4}m^2\overrightarrow{e_1}^2+\frac{7}{76}n^2\overrightarrow{e_2}^2+(\frac{7}{76}mn+\frac{1}{4}mn)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}$

因为$\vec{e}_1^2=\vec{e}_2^2=1$，$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}m^2+\frac{7}{76}n^2+(\frac{7}{76}mn+\frac{1}{4}mn)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}m^2+\frac{7}{76}n^2+\frac{13}{76}mn$

在ΔOBC中依据余弦定理得$m^2+n^2-mn=1$，所以$mn=m^2+n^2-1$，代入上式，

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{5}{19}m^2+\frac{8}{19}n^2-\frac{13}{76}=\frac{1}{19}(5m^2+8n^2)-\frac{13}{76}$，

设$m^2+n^2-1=mn\le tm^2+\frac{1}{4t}n^2(t>0)$，则$(1-t)m^2+(1-\frac{1}{4t})n^2\le1$，

令$\frac{(1-t)}{(1-\frac{1}{4t})}=\frac{5}{8}$得 $32t^2-12t-5=0$，得$t_1=\frac{5}{8}$，$t_2=-\frac{1}{4}$(舍)，所以$\frac{3}{8}m^2+\frac{3}{5}n^2\le1$，$5m^2+8n^2\le\frac{40}{3}$

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{19}(5m^2+8n^2)-\frac{13}{76}\le\frac{1}{19}\times\frac{40}{3}-\frac{13}{76}=\frac{121}{228}$，

方法二：方法一：依题意设$B(m,0)$，$C(0,n)$，$(m>0,n>0)$，

$\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，$BC=1$，$\overrightarrow{OD}=\frac{7}{19}\overrightarrow{OC}=(0,\frac{7}{19}n)$

因为F为BC中点$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{e_2}$，

E为BD中点，所以$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{7}{38}n\overrightarrow{e_2}$，

所以$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=(\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{e_2})\cdot(\frac{1}{2}m\overrightarrow{e_1}+\frac{7}{38}n\overrightarrow{e_2})=\frac{1}{4}m^2\overrightarrow{e_1}^2+\frac{7}{76}n^2\vec{e}_2^2+(\frac{7}{76}mn+\frac{1}{4}mn)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}$，

因为$\vec{e}_1^2=\vec{e}_2^2=1$，$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}m^2+\frac{7}{76}n^2+(\frac{7}{76}mn+\frac{1}{4}mn)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}m^2+\frac{7}{76}n^2+\frac{13}{76}mn$，

在$\triangle OBC$中依据余弦定理得$m^2+n^2-mn=1$，所以$mn=m^2+n^2-1$，代入上式，

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{5}{19}m^2+\frac{8}{19}n^2-\frac{13}{76}=\frac{1}{19}(5m^2+8n^2)-\frac{13}{76}$,

在$\triangle OBC$中，由正弦定理$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{OC}{\sin\angle COB}=\frac{OB}{\sin\angle BCO}$,

设$\angle BCO=\theta$，$m=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，$n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

$$5m^2+8n^2=\frac{20}{3}\sin^2\theta+\frac{32}{3}\sin^2(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{20}{3}\times\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{32}{3}\times\frac{1-\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$
$$=\frac{2}{3}[5(1-\cos2\theta)+8(1+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta)]$$
$=\frac{2}{3}(13-\cos2\theta+4\sqrt{3}\sin2\theta)=\frac{2}{3}[13+\sqrt{48+1}\sin(2\theta-\varphi)]\le\frac{40}{3}$，$\tan\varphi=\frac{1}{4\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{19}(5m^2+8n^2)-\frac{13}{76}\le\frac{1}{19}\times\frac{40}{3}-\frac{13}{76}=\frac{121}{228}$.