辨析概率求解中四类易错问题

田 鹏 华 静
(重庆市长寿中学)

概率是高中数学的主干知识之一,它以随机现象为研究对象,以随机事件发生的可能性为主要内容.现行的人教A版高中数学教材中介绍的概率模型有古典概型、互斥(对立)模型、条件概率模型与全概率模型.在概率学习过程中,由于对各种计算模型的区分不到位,导致出现很多概念性错误以及知识点混淆的错误.本文辨析在概率求解问题中的四类常见错误.

1 把"非等可能"事件当成"等可能"事件

古典概型的概率计算公式为 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$,其中 A 为随机事件,$n(A)$为随机事件 A 包含的样本点个数,Ω 为样本空间,$n(\Omega)$为样本空间包含的样本点个数.运用古典概型计算概率的关键是识别模型,准确计算随机事件和样本空间中的样本点个数.

例1 掷两枚质地均匀的骰子,求所得点数之和为6的概率.

错解 记事件 A 为"点数之和为6",Ω 为样本空间.两枚骰子上的点数之和有11种结果,即2,3,…,12,因此样本空间 Ω 中有11种结果,即 $n(\Omega)=11$,而点数之和为6只有1种结果,即 $n(A)=1$.根据古典概型计算公式得 $P(A)=\frac{1}{11}$.

辨析 样本空间中的11种结果出现的可能性是相等的,如点数之和为2的只有这(1,1)这1种结果,而点数之和为6的有(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)这5种.因此,错解是把"非等可能"事件的概率当成了"等可能"事件的概率计算.

正解 记事件 A 为"点数之和为6",Ω 为样本空间.用有序实数对(x,y)的方式记一个样本点,其中 x 表示其中一枚骰子掷出的点数,y 表示另一枚骰子掷出的点数.根据分步计数原理可得,样本空间 Ω 中有36种等可能的结果,而事件 A 中包含(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)这5种.根据古典概型计算公式得 $P(A)=\frac{5}{36}$.

例2 第19届亚运会的吉祥物由"琮琮""宸宸"和"莲莲"三类组成,现有印着三类吉祥物的挂件各2个(同类吉祥物完全相同,无区别),若把这6个挂件分给三位同学,每人2个,则恰好有一位同学得到同类吉祥物的概率是( ).

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{3}{7}$

错解 设吉祥物"琮琮""宸宸"和"莲莲"分别为 A,B,C,三个人分别为甲、乙、丙.根据题意,将 A,A,B,B,C,C 6个吉祥物平均分给三个人,求恰有一位同学得到同类吉祥物的概率.记事件 D 为"恰有一位同学得到同类吉祥物",Ω 为样本空间.下面分类计算各种情况.

若三个人都得到同类吉祥物,则可把 AA,BB,CC 看成3个不同的元素,根据排列知识,有 $\mathrm{A}_3^3=6$ 种结果.

若三个人都没有得到同类吉祥物,则把三类吉祥物 A,A,B,B,C,C 分成 AB,AC,BC,将其看成3个不同的元素,根据排列知识,有 $\mathrm{A}_3^3=6$ 种结果.

若三个人中有一个人得到同类吉祥物,则把三类吉祥物 A,A,B,B,C,C 分成 AA,BC,BC,或 AC,BB,AC,或 AB,AB,CC.先将 AA,BC,BC 分给三个人,有3种结果,后两种情况也各有3种结果,根据分类计数原理,共有9种结果.

综上,样本空间 Ω 中有21种结果,即 $n(\Omega)=21$,事件 D 中有9种结果,即 $n(D)=9$,根据古典概型计算公式得 $P(D)=\frac{3}{7}$,故选D.

辨析 样本空间中的21种结果不是等可能的.首先明确本题中的样本点是把三类吉祥物(共6个)平均分配给三个人的具体分法.若三个人都得到同类吉祥物,则 AA,BB,CC 在整个样本空间中共出现了6次.若三人中有一个人得到同类吉祥物,如 AA,BC,BC,则它们在整个样本空间中共出现了3次.因此,样本空间中的样本点不是等可能的,出现这种情况的原

因是把相同的吉祥物组合出现的次数合并了.

正解 记 2 个“琮琮”吉祥物为 A_1，A_2，2 个“宸宸”吉祥物为 B_1，B_2，2 个“莲莲”吉祥物为 C_1，C_2.事件 D 为恰有一位同学得到同类吉祥物，Ω 为样本空间.将 6 个不同的吉祥物平均分给甲、乙、丙三个人，则有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种结果.若三人中只有一个人得到同类吉祥物，则有 $C_3^1C_3^1C_2^1C_2^1=36$ 种结果.样本空间 Ω 中有 90 种结果，即 $n(\Omega)=90$，事件 D 中有 36 种结果，即 $n(D)=36$，根据古典概型计算公式得 $P(D)=\frac{2}{5}$，故选 B.

知识回顾 运用古典概型计算公式求概率，需满足三个条件：

1)样本空间中的每一个样本点是等可能的；

2)样本空间中的任意两个样本点间是互斥的；

3)样本空间中的样本点个数是有限的.

在实际运用时，首先应当明确问题中的样本点是什么，其次考虑如何求解样本点个数.如果样本点个数较少，可采用树状图直观分析，避免出现错误.

2 混淆互斥事件与独立事件

互斥事件指的是两个事件在任何一次试验中都不可能同时发生，强调的是关系.独立事件是指一个事件的发生与否对另一个事件的发生可能性没有影响，强调的是概率.

例 3 两人投篮，甲投篮命中率为 0.8，乙投篮命中率为 0.7，每人各投 3 次，两人恰好都投中 2 次的概率是多少？

错解 设“甲恰好投中 2 次”为事件 A，“乙恰好投中 2 次”为事件 B，则两人都恰好投中 2 次为事件 $A\cup B$.依题意有

$$P(A)=C_3^2\times(0.8)^2\times0.2=0.384,$$

$$P(B)=C_3^2\times(0.7)^2\times0.3=0.441,$$

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.825$，即两人恰好都投中 2 次的概率为 0.825.

辨析 依题意，甲、乙每次投篮命中的概率不变，每次投篮命中与不命中是相互独立的.两人恰好都命中 2 次实际上指的是甲在 3 次投篮中有 2 次命中这个事件与乙在 3 次投篮中有 2 次命中这个事件同时发生.因此，错解把独立事件同时发生当成了互斥事件的和事件进行计算.

正解 设“甲恰好投中 2 次”为事件 A，“乙恰好投中 2 次”为事件 B，则两人都恰好投中 2 次为事件 $A\cap B$.依题意有

$$P(A)=C_3^2\times(0.8)^2\times0.2=0.384,$$

$$P(B)=C_3^2\times(0.7)^2\times0.3=0.441,$$

则 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.169\ 344$，即两人恰好都命中 2 次的概率为0.169 344.

例 4 某家庭电话在家中有人时，打进的电话响第一声时被接听的概率为 0.1，响第二声时被接听的概率为 0.3，响第三声时被接听的概率为 0.4，响第四声时被接听的概率为 0.1，那么电话在响前四声内被接听的概率是多少？

错解 设事件 A_1 为“响第一声时被接听”，事件 A_2 为“响第二声时被接听”，事件 A_3 为“响第三声时被接听”，事件 A_4 为“响第四声时被接听”，则响前四声内被接听为事件 $A_1A_2A_3A_4$.依题意有 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.4$，$P(A_4)=0.1$，则

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0.1\times0.3\times0.4\times0.1=0.001\ 2,$$

所以电话在响前四声内被接听的概率是 0.001 2.

辨析 电话在响第一声、第二声、第三声、第四声被接听是互斥的.如果把接听电话看成一次试验，那么只要电话是第一声被接听的这个事件发生，那么响第二声、第三声、第四声被接听这些事件就不会发生.错解把互斥事件的概率问题当成了独立事件的概率问题.

正解 设事件 A_1 为“响第一声被接听”，事件 A_2 为“响第二声被接听”，事件 A_3 为“响第三声被接听”，事件 A_4 为“响第四声被接听”，则响前四声内被接听为事件 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$.依题意有 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.4$，$P(A_4)=0.1$，则

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=0.1+0.3+0.4+0.1=0.9,$$

所以电话在响前四声内被接听的概率是 0.9.

知识回顾 若事件 A 和 B 在任何一次随机试验中都不可能同时发生，则称 A 与 B 互斥，特别地，若事件 A 和 B 在任何一次随机试验中都不可能同时发生，且其中必然有一个发生，则称 A 与 B 对立.若事件 A 和 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.若事件 A 和 B 对立，则 $P(A)=1-P(B)$.若 A 事件与 B 不互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.若事件 A 的发生与否对事件 B 的发生可能性没有影响，则称 A 与 B 独立，则它们的积事件 AB 的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)$.

3　混淆条件概率与积事件

条件概率指的是在一个事件发生的条件下，另一个事件发生的概率，它也是一个事件发生的概率，满足概率的公理化定义.积事件指的是一次试验中两个事件同时发生，它不是一个概率而是一个事件，它发生的概率可用乘法公式计算.

例5　袋中有6个黄球和4个白球，若不放回抽样，每次任取一球，取2次，求第二次才取到黄球的概率.

错解　记“第一次取到白球”为事件A，“第二次取到黄球”为事件B，“第二次才取到黄球”为事件C.依题意有$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$，则

$$P(C)=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3},$$

所以第二次才取到黄球的概率为$\frac{2}{3}$.

辨析　依题意，第二次才取到黄球并不是指在第一次取到白球的条件下第二次取到黄球这个事件.第二次“才”取到黄球说明第一次取到的是白球.因此，它表示第一次取到白球与第二次取到黄球同时发生.

正解　记“第一次取到白球”为事件A，“第二次取到黄球”为事件B，“第二次才取到黄球”为事件C.依题意$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B|A)=\frac{2}{3}$，则

$$P(C)=P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.$$

例6　100件产品中有10件次品，随机不放回取2次，每次取一件，求在第一次取得正品的条件下，第二次取得正品的概率.

错解　设“第一次取得正品”为事件A，“第二次取得正品”为事件B，则“在第一次取得正品的条件下，第二次取得正品”为事件AB.依题意可得$P(A)=\frac{9}{10}$，$P(B)=\frac{89}{99}$，则$P(AB)=\frac{9}{10}\times\frac{89}{99}=\frac{89}{110}$.

辨析　“在第一次取得正品的条件下，第二次取得正品”指的是以第一次取得正品为条件，第二次取得正品的概率，而不是第一次取得正品这个事件和第二次取得正品这个事件同时发生.错解把条件概率问题当成了两个事件同时发生的概率问题.

正解　设“第一次取得正品”为事件A，“第二次取得正品”为事件B，则“在第一次取得正品的条件下，第二次取得正品”为事件$B|A$.依题意，$P(A)=\frac{9}{10}$，$P(AB)=\frac{89}{110}$，则$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{89}{99}$，所以在第一次取得正品的条件下第二次取得正品的概率为$\frac{89}{99}$.

知识回顾　在事件A发生的条件下，事件B发生为事件$B|A$，则称事件$B|A$发生的概率为条件概率，且$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.特别地，在古典概型中，$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$，其中$n(AB)$为$A$与$B$同时发生包含的样本点数，$n(A)$为条件包含的样本点数.在一次试验中，将$A$与$B$同时发生这一事件记为$AB$.若$A$与$B$独立，则$P(AB)=P(A)P(B)$；若$A$与$B$不独立，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.在实际运用时，厘清条件概率的本质含义与积事件的本质含义最为关键.

4　误解独立重复事件同时发生的关键条件

独立重复事件指的是在相同的条件下，独立重复做多次试验，每次试验中只有互为对立事件的两个事件之一发生，其概率计算满足独立重复事件的概率乘法公式.

例7　在某场足球比赛中，若甲队与乙队在常规时间内战平，则直接进入点球决胜环节.在点球决胜环节中，双方首先轮流罚点球3轮，罚中更多点球的球队获胜.若双方在三轮罚球中未分胜负，则需要进行一对一的点球，即双方各派出一名队员罚点球，直至分出胜负；已知甲队每位队员罚点球的命中率都能达到0.8，而乙队队员的点球命中率只有0.5，比赛时通过抽签决定甲队在每1轮都先罚球.若两队在前3轮点球结束后打平，进入一对一点球，一对一点球由没有在之前点球大战中出场过的队员主罚点球，若在一对一点球的某一轮中，某队队员射入点球且另一队队员未能射入点球，则比赛结束；若两名队员均射入点球或未能射入点球，则进行下一轮比赛.若直至双方场上每名队员都已经出场罚球，则比赛亦结束，双方通过抽签决定胜负.求一对一点球中，点球3轮结束比赛的概率.

错解　设事件B为“点球三轮结束比赛”，事件B发生当且仅当前两轮点球未能结束比赛.第三轮点球分了胜负，结束比赛.第3轮点球有甲队射入点球而乙

队未能射入点球和甲队未能射入点球而乙队射入点球两种情况，则

$$P(B)=(1-0.8)^3\times(1-0.5)^2\times0.5+(1-0.5)^3\times(1-0.8)^2\times0.8=0.005,$$

故一对一点球中，点球3轮结束比赛的概率为0.005.

辨析 错解未能准确理解题意，把两个队中的各3名队员点球当成了独立事件，让6名队员的点球事件同时发生，其中忽略了很多情况.事实上，虽然每轮点球，甲、乙两队的队员射入点球的概率不变，对于每名队员来讲，每轮点球只有射入点球和未能射入点球两种结果，每名队员每轮射入点球或未射入点球是独立的，互不影响的，但是每轮点球能不能结束比赛取决于甲、乙两队的两名队员.因此，要以每轮点球结束比赛的概率为研究对象.

正解 记事件B为“点球3轮结束比赛”，事件A_i为“第i轮点球结束后比赛结束”，$i=1,2,3$，则$P(A_i)=0.8\times0.5+0.2\times0.5=0.5$，事件$B$发生当且仅当前2轮点球未能结束比赛.因此，$P(B)=(1-0.5)^2\times0.5=0.125$，所以点球3轮结束比赛的概率为0.125.

例8 甲、乙两人进行了一次羽毛球比赛，约定先胜3局者获得比赛的胜利，比赛结束.假设在1局比赛中若甲先发球，这局甲获胜的概率是$\frac{2}{3}$；若乙先发球，这局比赛乙获胜的概率是$\frac{1}{2}$.已知第1局比赛甲先发球，以后每局比赛由前1局获胜的一方先发球，且各局比赛结果相互独立，每局比赛都分出胜负.求比赛进行了4局，甲获胜3局的概率.

错解 记事件A为比赛进行了4局，甲获胜3局.依题意，第4局一定是甲获胜，前3局中甲获胜了2局，则$P(A)=C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{27}$，所以比赛进行了4局，甲获胜3局的概率为$\frac{4}{27}$.

辨析 错解误认为每一局比赛甲获胜的概率是不变的，导致计算出错.事实上，每一局比赛可能是甲获胜，也可能是乙获胜.由于谁发球对甲取胜的概率有影响，因此，用组合数C_3^2表示甲在前3局中获胜的情况种数是没问题的，但是概率需要分情况分析.

正解 由题意知第4局一定是甲获胜，前3局中甲获胜了2局，有3种情况，鉴于每局甲获胜的概率受谁发球影响，下面列表说明这3种情况.如表1所示，用#表示发球，用√表示取胜，空格表示既不发球也不赢球.

表1

		第1局	第2局	第3局	第4局
情况1	甲	#√	#√	#	√
	乙			√	#
情况2	甲	#√	#	√	#√
	乙		√	#	
情况3	甲	#	√	#√	#√
	乙	√	#		

从上表可看出，$P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，所以比赛进行了4局，甲获胜3局的概率为$\frac{2}{9}$.

知识回顾 在一次试验中，若只有两种结果，则称此试验为伯努利试验.在相同的条件下，独立重复伯努利试验n次，则称为n重伯努利试验.记一次伯努利试验中其中一种结果为事件A，其发生的概率为p.则在n次试验中，事件A发生k次的概率为$P(A)=C_n^k(1-p)^{n-k}p^k(k=0,1,2,\cdots,n)$.运用独立重复试验的概率公式的关键有两点，其一看各次试验是否是独立的，其二看每次试验是否只有两个结果且每个结果发生的概率不变.如常见的抛掷一枚质地均匀的硬币n次，求其中正面向上出现k次的概率问题就是一个n重伯努利试验问题.

5 小结

理解每一种概率模型是学习概率知识的重中之重，也是准确计算概率问题的关键.在概率问题的求解中，经常由于未能理解题意或者将某些知识点(概念)混淆导致出现求解错误的情况.要想规避这些错误，需要厘清每一个概念，能够记住一些经典的概率问题.例如，可以用抛掷质地均匀的骰子理解古典概型，可以用“三门问题”理解条件概率，可以用重复抛掷质地均匀的硬币理解独立重复试验.

本文系2022年重庆市教育科学“十四五”规划一般课题“大观念理念下主题学习的实践研究”(课题编号：K22YJ113524)的研究成果.

(完)