向量在高中数学解题中的应用研究

胡　涛

（常熟市尚湖高级中学，江苏 常熟 215500）

摘　要：本文在探讨向量在高中数学解题中的具体应用，并分析其在解题过程中的作用和效果.提出了向量在高中数学解题应用中的注意事项，对于改进高中数学教学和提高学生解题能力具有一定的指导意义.

关键词：向量；高中数学；解题技巧；应用研究

中图分类号：G632　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008－0333(2024)06－0026－03

向量作为数学中的重要概念之一，在几何、代数等领域都扮演着重要角色. 它不仅为解决各类数学问题提供了一种全新的思维方式，也为理解和应用数学提供了更广阔的视野.

1 向量的概述

向量是数学中的一个重要概念，用于表示有大小和方向的物理量或几何对象. 向量可以在不同的领域中应用，例如物理学、几何学、计算机图形学等.

向量可以进行多种运算，包括加法、减法、数量积和向量积等. 在进行向量的加法和减法时，将两个向量的起点连接起来形成一个平行四边形，然后从平行四边形的对角线上取出向量的终点作为结果向量的终点[1]. 向量的数量积（也称为点积或内积）是一个标量，等于两个向量的模的乘积与它们之间的夹角的余弦值的乘积. 在几何学中，向量的运用较多，可以表示平面上的点、线段、直线、平行线、垂直线等几何对象，并且能够进行多种几何变换. 向量还可以用来解决方程组、证明等式和不等式、计算三角函数值、描述取值范围以及处理数列等问题.

2 高中数学解题中应用向量的必要性

（1）简化计算. 向量的运算规则可以帮助我们简化计算过程. 通过使用向量的加法、减法、数量积等运算，可以将复杂的数学问题转化为更简单的向量运算问题. 这使我们能够更快、更准确地解决问题，减少繁琐的计算步骤.

（2）提供几何直观. 向量可以用来表示几何对象，如点、线段、直线等. 通过向量的几何表示，我们可以更直观地理解问题的几何性质. 通过将问题转化为向量的几何问题，我们可以更好地利用几何直观解决问题，而不仅仅依赖于抽象的代数符号.

（3）解决复杂方程组. 向量可以用来解决一些复杂的方程组. 通过将方程组转化为向量形式，我们可以利用向量的线性组合和矩阵的运算来求解方程组. 这种方法可以简化方程组的求解过程，特别是当方程组包含大量变量和方程时[2].

（4）统一概念和方法. 向量是一种统一的数学概念，可以应用于不同的数学领域. 通过使用向量，我们可以将不同的数学概念和方法联系起来，形成一个整体的数学体系.

（5）推广应用. 向量不仅在高中数学中有应用，

收稿日期：2023－11－25

作者简介：胡涛（1991.3－），男，江西省新余人，本科，中学一级教师，从事高中数学教学研究.

还在许多其他学科和实际问题中有广泛的应用. 通过学习和应用向量的概念和方法,我们可以为将来的学习和职业发展打下坚实的基础. 向量的应用范围包括物理学、工程学、计算机科学等领域. .

3 高中数学解题中向量的应用

3.1 向量在平面几何中的应用

向量可以用来表示平面上的点、线段、直线、平行线、垂直线等几何对象. 通过向量的加法、减法和数量积等运算,可以进行向量的平移、旋转、镜像等几何变换. 此外,向量的模可以用来计算线段的长度、直线的斜率等.

例 1 如图 1 所示,正方形 $ABCD$,点 P 在 BD 上,且 $PECF$ 为矩形,证明:$PA=EF$.

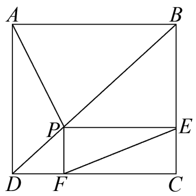

图 1 例 1 题图

证明:建立坐标系,如图 2 所示.

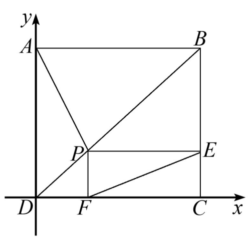

图 2 证明示意图

设 AB 长为 1,则点 A 坐标为 $(0,1)$,引入变量 λ,假设 DP 长为 $\sqrt{2}\lambda(0<\lambda<1)$,

$DF=PF=\lambda$,点 F 坐标为 $(\lambda,0)$,点 E 坐标为 $(1,\lambda)$,点 P 的坐标为 (λ,λ).

$\overrightarrow{PA}=(-\lambda,1-\lambda)$,$\overrightarrow{EF}=(\lambda-1,-\lambda)$

$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2}$,$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}$,

$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{EF}|$,所以 $PA=EF$.

3.2 向量在等式(不等式)证明中的应用

向量的性质可以用来证明等式和不等式. 通过向量的加法、减法、数量积等运算,可以推导出一些等式和不等式的性质,从而进行证明.

例 2 若 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,求证:$a^2+b^2=1$.

证明:构造 $\boldsymbol{m}=(a,b)$,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{1-b^2},\sqrt{1-a^2})$,

则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,

$|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{1-b^2+1-a^2}\leqslant\dfrac{a^2+b^2+2-a^2-b^2}{2}=1$,

$\therefore 1\leqslant|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant1$,因此 $|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|=1$,$m$ 向量和 n 向量共线平行,$a^2+b^2=1-b^2+1-a^2$,求得 $a^2+b^2=1$.

3.3 向量在取值范围中的应用

向量的模、数量积、坐标和方向角等可以用来描述向量的取值范围. 通过理解向量的取值范围,可以解决一些与向量相关的问题,如向量的大小比较、向量的正交性等.

例 3 单位向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,且 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,求 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围.

解 因为 $\boldsymbol{a}.\ \boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为互相垂直的单位向量,因为 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,所以 $|\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=1$,绘图如 3 所示,得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,绘制 $\boldsymbol{c}$ 后,得到 $\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

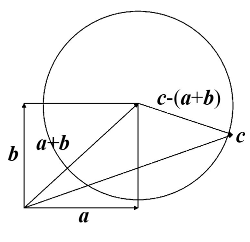

图 3 例 3 解析示意图

$\boldsymbol{c}$ 在如图 3 中的圆点为 $(1,1)$,半径 1 的圆形轨迹上移动,因此 $|\boldsymbol{c}|$ 最大值为 $\sqrt{2}+1$,最小值为 $\sqrt{2}-1$,所以 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$.

3.4 向量在数列问题中的应用

向量可以用来表示数列的通项. 通过向量的运算和性质,可以推导出数列的递推关系或通项公式,从而解决数列问题. 向量的求和、差分、乘法等运算可以用来计算数列的和、差分列等.

例4 已知$\triangle ABC$中三边长a、b、c为等差数列.

(1)若$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{3}{5}$,求$\triangle ABC$中最大角的度数;

(2)若$b=1$,且$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2-(a-c)^2$,求$\triangle ABC$的面积.

解 (1)因为$\sin A:\sin B=3:5$,

所以$a:b=3:5$,

令$a=3k$,则$b=5k(k>0)$,

因为三边长a、b、c依次成等差数列,

所以$c=7k$,

所以$\cos c=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$,

所以最大角$C=\frac{2\pi}{3}$.

(2)因为$b=1$,三边长a、b、c依次成等差数列,

所以$a+c=2$;

又因为$\overrightarrow{BA}.\ \overrightarrow{BC}=b^2-(a-c)^2$,

所以$ac\cos B=b^2-(a-c)^2$,

所以$\frac{1}{2}(a^2+c^2-1)=1-a^2-c^2+2ac$,

所以$3(a+c)^2-10ac=3$,将$a+c=2$代入,

求得$ac=\frac{9}{10}$,$\cos B=\frac{2}{3}$,

所以$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

三角形ABC面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{5}}{20}$.

4 高中数学解题中应用向量的注意事项

在高中数学解题中应用向量时,有几个注意事项需要考虑:

(1)理论与实践结合.向量的教学应该结合理论和实际应用,让学生明白向量的概念、性质和运算规则,并能够应用到实际问题中.通过具体的例子和实际应用的问题,帮助学生理解向量的意义和用途.

(2)强调几何直观.向量在几何中的意义和应用是理解向量的重要基础.在向量的教学中,应该强调几何直观,让学生能够通过向量的几何表示来理解问题和解题思路.通过绘制向量图形、探索几何性质等方式,使学生的几何直观能力得到提升[3].

(3)注重问题解决过程.向量的教学应该注重问题解决过程的训练.通过引导学生分析问题、建立数学模型、选择合适的向量运算和推导方法,培养学生的问题解决能力和数学思维能力.

(4)强化基本概念和运算.向量的教学应该注重基本概念和运算的理解和掌握.学生需要清楚向量的定义、向量的模、方向、坐标等基本概念,并能够熟练运用向量的加法、减法、数量积等运算规则.通过大量的练习和应用题,巩固基本概念和运算的掌握[4].

(5)强调数学语言和符号.向量的教学中应该强调数学语言和符号的使用.学生需要学会用准确的数学语言描述向量的性质和运算规则,并能够正确使用向量的符号表示和计算.

(6)多样化教学方法.向量的教学应该采用多样化的教学方法,包括讲解、示范、练习、探究、实践等.教师可以根据学生的学习特点和需求,选择适合的方法和教学资源,激发学生的学习兴趣和积极性.

5 结束语

向量在高中数学解题中起到了重要的作用,它不仅丰富了解题的方法和思维,还培养了学生的空间想象力和抽象思维能力.合理地应用向量,学生可以更好地理解和应用数学概念,进而提高解题的准确性和效率.

参考文献:

[1] 包本刚.向量在高中数学解题中的应用[J].数理天地(高中版),2023(07):40-42.

[2] 李鹿雷.向量法在高中数学解题中的有效应用[J].数理天地(高中版),2023(17):51-52.

[3] 陈纪源.向量在高中数学解题中的应用研究[J].数学学习与研究,2018(03):135.

[4] 孟飞.向量法在高中数学解题中的应用[J].数理化解题研究,2023(16):85-87.

[责任编辑:李 璟]