导数中的基本问题
——曲线的切线

黎栋材　毕航达

（北京师范大学附属实验中学）

曲线的切线问题是高考数学中的热点问题，大家对“在一点处”和“过一点处”的切线问题比较熟悉，最近几年，过一点切线的条数及两曲线的公切线等成为新的热点问题.曲线的切线问题除了考查考生对导数几何意义的理解，还涉及对函数与方程、化归与转化、构造等思想方法的考查.

1　基础知识梳理

1）函数在一点处的导数的几何意义——曲线在该点处切线的斜率.

若 $y_0=f(x_0)$，则 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

2）如图 1 所示，直线 $y=kx+b$ 与 $y=f(x)$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$ 的三个关系.

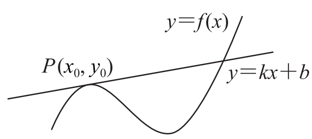

图 1

①$y_0=kx_0+b$；

②$y_0=f(x_0)$；

③$k=f'(x_0)$.

3）对“在一点处”与“过一点处”的切线的再认识.

如图 2 所示，直线 l_1,l_2 分别是函数 $y=f(x)$“在”A,B 两点的切线，同时直线 l_1,l_2 也是“过”点 $P(x_0,y_0)$ 且与 $y=f(x)$ 相切的直线.

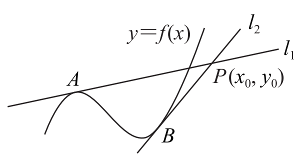

图 2

2　“在一点处”的切线问题

例 1　（2021 年全国甲卷 13）曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为________.

分析　曲线及点都是给定的，而且点在曲线上，所以求出曲线在该点的导数，利用点斜式即可得直线方程.

解　求导得 $y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$，所以 $y'|_{x=-1}=5$.因为 $(-1,-3)$ 在曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 上，所以切线方程为 $y+3=5(x+1)$，化简得

$$5x-y+2=0.$$

例 2　设函数 $F(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}\,(0<x\leqslant 3)$ 的图像上任意一点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率 $k\leqslant\dfrac{1}{2}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

分析　由导数的几何意义可知，切线的斜率即曲线在该点的导数值，所以求出导函数之后，问题则转化为含参数的不等式恒成立问题.

解　因为 $F'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}\,(0<x\leqslant 3)$，所以 $k=\dfrac{x_0-a}{x_0^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\,(x\in(0,3])$ 恒成立，即 $a\geqslant-\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0\,(x\in(0,3])$，即 $a\geqslant\left(-\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0\right)_{\max}(x\in(0,3])$，易知当 $x_0=1$ 时，$-\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0$ 在 $(0,3]$ 上取得最大值 $\dfrac{1}{2}$，所以 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，故 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

点评　此类问题较为常规，由于给定的点在曲线上，所以该点的导数值即为曲线在该点切线的斜率.如果要求的是切线方程，只需利用点斜式即可；如果是其他问题，对条件进行适当转化即可.

3　“过一点处”的切线及切线条数的问题

例 3　在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$，则点 A 的坐标是______.

分析　题目的要求是在曲线 $y=\ln x$ 上找一点 A，使得其切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$，这与例 1 有着本质的区别.

解 设点 $A(x_0,y_0)$，则 $y_0=\ln x_0$. 又 $y'=\dfrac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，于是曲线 $y=\ln x$ 在点 A 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{x}{x_0}-1$. 由于切线过点 $(-\mathrm{e},-1)$，代入整理得 $x_0\ln x_0=\mathrm{e}$.

令 $g(x)=x\ln x$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，所以不存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $x_0\ln x_0=\mathrm{e}$. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=\ln x+1>0$，所以 $y=g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增且 $g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，故 $x_0\ln x_0=\mathrm{e}$ 存在唯一的实数根 $x_0=\mathrm{e}$，此时 $y_0=1$，故点 A 的坐标为 $(\mathrm{e},1)$.

点评 “过一点处”的切线与“在一点处”的切线有着本质的区别，求“过一点处”的切线方程，一般是设出切点，首先求出在该点的切线方程，在该点满足切线方程的基础之上，再利用方程、转化等思想方法加以解决.

例4 （2021年新高考Ⅰ卷7）若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）.

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

分析 这是一道典型的“过一点切线条数”的问题，即确定过平面直角坐标系上的哪些点可以作两条与 $y=\mathrm{e}^x$ 相切的直线.

解法1 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上任取一点 $P(t,\mathrm{e}^t)$，对函数 $y=\mathrm{e}^x$ 求导得 $y'=\mathrm{e}^x$，所以曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}^t x+(1-t)\mathrm{e}^t$. 由题意可知点 (a,b) 在直线 $y=\mathrm{e}^t x+(1-t)\mathrm{e}^t$ 上，则

$$b=a\mathrm{e}^t+(1-t)\mathrm{e}^t=(a+1-t)\mathrm{e}^t.$$

令 $f(t)=(a+1-t)\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(a-t)\mathrm{e}^t$. 当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，函数 $f(t)$ 单调递增；当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，函数 $f(t)$ 单调递减，进而可知 $f_{\max}(t)=f(a)=\mathrm{e}^a$.

过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线等价于：直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图像有两个交点. 又当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$. 结合函数 $f(t)$ 的图像（如图3），可知当 $0<b<\mathrm{e}^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图像有两个交点，故选D.

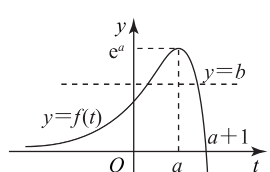

图3

解法2 事实上，画出 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像，借助几何直观即可判定点 (a,b) 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方和 x 轴上方时才可以作两条切线（如图4）. 由此可知 $0<b<\mathrm{e}^a$，故选D.

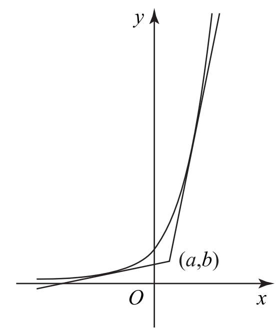

图4

点评 例3告诉我们，如果满足 $x_0\ln x_0=\mathrm{e}$ 的 x_0 不止一个，那么过点 $(-\mathrm{e},-1)$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切的直线就不止一条. 在例4中，过 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，问题转化为关于 t 的方程 $b=(a+1-t)\mathrm{e}^t$ 有两个不同的解. 由此可见，过一点切线条数的问题可转化为方程的解的个数问题.

4 公切线问题

如果一条直线同时与两曲线都相切，那么这条直线就是这两曲线的公切线. 一般来说，有以下两种类型.

1）一个切点.

例如，直线 $y=x$ 与 $y=\ln(x+1)$，$y=\sin x$ 同时相切于点 $(0,0)$（如图5）.

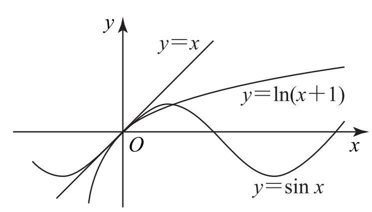

图5

2）两个切点.

例如，直线 $y=x+1$ 与 $y=\mathrm{e}^x$ 相切于点 $(0,1)$，同时与 $y=\ln(x+2)$ 相切于点 $(-1,0)$（如图6）. 无论是哪一种类型，由于切线是公共的，所以需要利用切线的斜率相等或切线方程相同来建立方程（组），使问题得以解决.

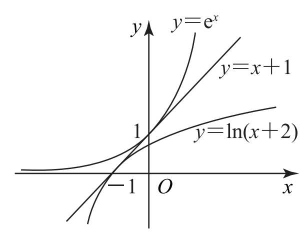

图6

例5 （2020年全国Ⅲ卷理10）若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为（　　）.

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\dfrac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

分析　先由直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 相切，设出切点的坐标，求得直线方程，再由直线 l 与圆相切，解得直线方程.

解　设直线 l 与 $y=\sqrt{x}$ 相切于点 $(x_0,\sqrt{x_0})$ $(x_0>0)$，又 $y=\sqrt{x}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，于是可求得直线 l 的方程为

$$x-2\sqrt{x_0}y+x_0=0.$$

因为直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 相切，所以 $\frac{|x_0|}{\sqrt{1+4x_0}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，解得 $x_0=-\frac{1}{5}$（舍）或 1，则直线 l 的方程为 $x-2y+1=0$，即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，故选 D.

点评　此题以两条曲线（幂函数的图像、圆）的公切线为载体，考查导数的几何意义的应用以及直线与圆的位置关系.此题提醒我们，同样是切线问题，但由于曲线类型不同，处理的方法也不尽相同.

例 6　（2019 年全国Ⅱ卷理 20）已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

分析　第（1）问涉及函数的单调性、零点，这些都是函数最基本的性质，在备考的过程中要高度重视；第（2）问是在第（1）问的基础上，证明满足条件的直线是两曲线的公切线.

解　（1）由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增.又因为 $f(\mathrm{e})=1-\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}<0$ 且 $f(\mathrm{e}^2)=2-\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，所以存在 $x_1\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)\subseteq(1,+\infty)$，使得 $f(x_1)=0$.又

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\left(1-\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right)>0,\ f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=-\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}<0,$$

所以存在 $x_2\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\subseteq(0,1)$，使得 $f(x_2)=0$.

综上，$f(x)$ 有且仅有两个零点.

（2）因为 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，所以 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$.易知曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{x_0}$，又 $\frac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-\ln x_0}$，点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上，且曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 B 处的切线斜率也为 $\frac{1}{x_0}$.又直线 AB 的斜率

$$k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0},$$

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

点评　事实上，给定的函数 $f(x)$ 具有性质：$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $(x>0$ 且 $x\neq1)$（读者可自行证明），则第（1）问中的 x_1，x_2 互为倒数，即 $x_1x_2=1$.在解决第（2）问时，要注意切线的斜率相等（均为 $\frac{1}{x_0}$），并不能说明就是公切线，还需要利用 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$ 证明两切点连线的斜率等于 $\frac{1}{x_0}$.本题实质上讨论的是曲线 $y=\ln x$ 与 $y=\mathrm{e}^x$ 公切线的问题，事实上，这两条曲线有两条公切线，它们关于直线 $y=x$ 对称.

近几年的高考中，与曲线切线相关的问题大致与上述列举的问题相关.从知识的层面看，涉及导数的几何意义、点斜式的直线方程等.从思想方法的层面看，涉及函数与方程、化归与转化等思想方法.无论是知识层面，还是思想方法层面，高考试题都是通过多知识点的交会与综合，考查考生分析问题、解决问题的能力.

（完）

扫描二维码，观看相关视频