

培养数形结合思想 发展数学核心素养

——以“直线与圆的位置关系”的教学为例

翁文彪 福建省福清港头中学 350317

[摘要] “直线与圆的位置关系”是高中数学的重要知识点,也是高考的重要考点,还是培养学生数形结合思想的重要素材.在教学中,教师要结合教学实际创设有效的教学情境,引导学生由“数”向“形”转换,让学生学会用代数法来分析和解决几何问题,培养学生的数形结合思想,发展学生的数学核心素养.

[关键词] 数形结合思想;教学情境;数学核心素养

对于“直线与圆的位置关系”这一内容学生并不陌生,在初中阶段就重点学习过.不过初中阶段主要是通过直观观察得到结论,而高中阶段则是通过运算得到结论.在具体教学中,教师应以学生的已有知识和经验为出发点,引导学生从“代数”和“几何”两个角度研究直线与圆的位置关系,通过由“形”到“数”的转换加深学生对数学知识的理解,提高学生分析和解决问题的能力.

教学设计与实施

1. 创设情境,引入主题

例1 已知圆 C 的圆心坐标为 $(2,3)$,半径为1,直线 $l:kx-y-1+2k=0$ 恒过定点 P ,请分别求出点 P 的坐标及圆 C 的标准方程,并化成一般式.

思考:(1)点 P 与圆 C 具有怎样的位置关系?(2)动直线 l 与圆 C 具有怎样的位置关系?

问题给出后,学生积极思考,求得定点 P 的坐标为 $(-2,-1)$,圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$,化成一般式为 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$.对于思考(1),学生借助图形可知,点 P 为圆 C 外

一点.对于思考(2),学生再借助图形去判断却犯了难,由此引发了学生的认知冲突,激发了学生的探究欲.

设计意图 直线方程、圆方程以及点与圆的位置关系是学生已经学习并掌握的知识,在此基础上进一步拓展延伸,通过动直线的变化引出直线与圆的三种位置关系——相离、相切、相交.

2. 合作交流,数学建构

教师利用几何画板展示直线 $l:kx-y-1+2k=0$ 绕定点 $P(-2,-1)$ 旋转,让学生直观感知如何判断直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的位置关系.

师:如何判断直线与圆的位置关系?

生齐声答:看直线与圆有几个公共点.

师:很好,图1中的直线与圆是怎样的位置关系呢?(教师展示图1)

生1:相切.(其他学生也赞成生1的说法)

师:是吗?现在我们放大来看一看.(教师将图1的局部放大,得到图2)

生1:看图1明明是相切的,怎么又是相交的呢?(学生投来诧异的眼神)

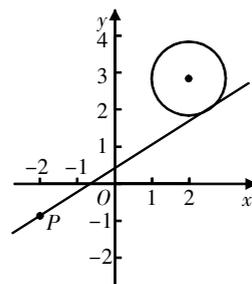


图1

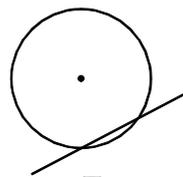


图2

师:人会产生“错觉”,所以眼见未必为实.有没有其他方法可以准确地判断直线与圆的交点个数呢?

问题给出后,教师刻意放慢速度,让学生结合已有知识和经验探寻其他解决方案.

生2:前面我们学习了直线的方程和圆的方程,可以利用方程思想来研究直线与圆的位置关系.

师:不错的想法,解析几何的本质就是用代数法来研究几何问题.

作者简介:翁文彪(1981—),本科学历,中学一级教师,从事高中数学教学工作.

若 $k=1$,则直线 $l:x-y+1=0$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 有几个交点呢?

教师启发学生结合两直线相交的研究经验来解决圆与直线相交的问题;学生联立直线和圆的方程,求出其交点的坐标,判断两者的位置关系.

师:上述过程(略)是否可以简化呢?一定要求出交点的坐标才能判断它们有几个交点吗?

生3:不需要,只要考虑根的判别式即可,即根据根的判别式判断方程的实根个数,就可以得到交点的个数.

师:很好,结合大家交流的内容,请同学们总结一下判断直线与圆的位置关系的方法.

教师先让学生以小组为单位进行归纳总结,然后让各小组交流展示结果.

生4:联立直线和圆的方程,通过消元法得到一个一元二次方程,若 $\Delta>0$,则直线与圆有两个交点,即直线与圆相交;若 $\Delta=0$,则直线与圆有且仅有一个交点,即直线与圆相切;若 $\Delta<0$,则直线与圆没有交点,可以判断直线与圆相离.

师:这样将几何问题代数化,利用方程思想解决问题,可以有效规避“错觉”的风险,充分体现数学的严谨性.

设计意图 在教学中,教师先从“形”的角度出发,让学生通过观察直观感知直线与圆的位置关系,然后利用“错觉”让学生体会“形缺数时难入微”的含义,以此激发学生用代数法研究几何问题的积极性.

师:除了应用方程思想,你还能找到其他方法吗?回顾初中判断直线与圆的位置关系的方法,你有什么发现呢?

生5:比较 d (圆心到直线的距离)与 r (圆的半径)的大小.

师:利用这个方法你能判断直线 $l:x-y+1=0$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的位置关系吗?

生6:圆心 $C(2,3)$ 到直线 $l:x-y+1=0$ 的距离 $d=0$, $d<r$,所以直线与圆相交.

师:哦, $d=0$?

生6:直线刚好过圆心.

师:如果直线与圆相切或相离,

又会存在怎样的情况呢?

生7:若 $d>r$,则相离;若 $d=r$,则相切.

师:很好,这样利用图形的几何性质同样可以判断直线与圆的位置关系.对于以上研究结果,能总结一下吗?

在教师的启发和指导下,学生通过互动交流对代数法和几何法进行了归纳总结.

设计意图 引导学生从“形”的角度出发,运用初中判断直线与圆的位置关系的方法及点到直线的距离公式,得到判断直线与圆的位置关系的另一种方法——几何法,以此让学生学会运用数量关系刻画直线与圆的位置关系,深化对数形结合的理解.

3. 数学应用,深化解

例2 过点 $A(-1,4)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线,求切线方程.

例3 求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

题目给出后,教师让学生独立求解,并鼓励学生分别应用代数法和几何法来处理问题.问题解决后,教师让学生展示解答过程,并规范其书写.紧接着,教师对例2进行变式,让学生思考:若定点 A 的坐标为 $(1,5)$ 或 $(1,0)$,此时切线方程又会怎样变化?使学生体会定点位置对求切线方程的影响.

设计意图 通过典型例题帮助学生巩固和强化新知,培养学生思维的灵活性,提升学生的解题技能.在此过程中,教师鼓励学生应用代数法和几何法求解,并对这两种方法进行对比分析,让学生了解代数法的一般性和几何法的直观性、简洁性,进一步体会数形结合的重要性.

4. 回顾小结,升华认知

该环节教师启发学生从知识、思想、方法等多方面进行归纳总结,然后组内交流,最后各小组派代表展示交流成果.

设计意图 通过课堂小结帮助学生完成知识、思想、方法的梳理,完善认知结构.在此过程中,教师不仅重视学生对数学思想方法的提炼,促进

学生认知升华,还鼓励学生提出自己所想、所惑,培养学生善于提出问题、思考问题的习惯,提升学生的数学学习品质.

课后反思

1. 巧用教学情境,激发学习热情

一个好的情境应该具有良好的生长性和开发性,能有效激发学生学习的积极性.在现实教学中,大多数教师习惯以现实生活为依托,这样的情境是易于学生理解的,有利于学生数学抽象和数学建模能力的培养.不过,教学中要避免只使用单一情境,而应通过情境的多样性激发学生的学习兴趣.在本课教学中,教师结合教学实际设计数学情境,由点与圆的位置关系延伸至直线与圆的位置关系.在建构新知的过程中,从学生的最近发展区出发,通过创设问题情境引导学生将旧知与新知联系起来,促进知识网络的建构和思维的生长,促进学生数学能力的提升.

2. 渗透数形结合思想,培养数学素养

数形结合思想是重要的数学思想之一,是学生研究解析几何问题的重要方法.在本课教学中,应重视数形结合思想方法的渗透,让学生感受数形相互依存的关系,体会应用数形结合思想方法的必要性、重要性和简洁性,培养学生数形结合能力.在本课教学中,教师利用“错觉”创设冲突,让学生体验“视觉直观”是不可靠的,由此自然实现由“形”到“数”的转化,让学生学会用几何图形中的数的特征来解决几何问题,充分感知数形结合思想方法的优势.

总之,在实际教学中,教师应结合教学内容创设有效的情境,让学生通过联想、类比、归纳等活动加深对数学知识的理解,在分析和解决问题的过程中发展学生的数学学科核心素养.同时,教学中应重视凸显知识间的内在联系,促进学生知识网络的建构以及数学迁移能力、分析和解决问题能力的提升.