巧用共线定理　简化数学运算

——以一类椭圆问题为例

王　波

（江苏省苏州实验中学）

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》明确指出，基本理念包括把握数学本质，启发思考，改进教学.教师要从学生最近发展区出发，设计有联系的学习情境，设计思维连贯的问题串，在联系、对比、变化、拓展问题中把握本质，理解本质.在解析几何中，我们常遇到由一个定点引出一条动直线交椭圆于不同两点的几何特征问题，学生正向思维是设出直线方程，将之与椭圆方程联立，运用根与系数的关系解决问题.事实上，这种处理方法往往会带来较大的计算量，导致学生“有思路，没出路”.本质原因是解析几何是运用代数的方法解决几何问题，在这一过程中涉及“数”与“式”的灵活转换和整合，因此，“运算”便成了问题解决过程中的“拦路虎”.本文主要探究根据题设特征，利用向量共线定理来处理直线与椭圆关系问题.

例 1　已知椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F，过点 $A(3,0)$的直线 l 交椭圆于 P，Q 两点.若点 P 关于 x 轴的对称点为 M，求证：M，F，Q 三点共线.

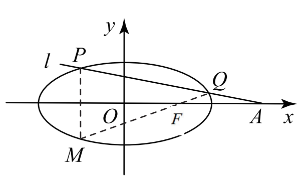

图 1

分析　如图 1 所示，解析几何中图形的产生过程可以作为我们解题的思路，通过正向思维，设过定点 A 的直线方程为 $x=\lambda y+3$，然后将之与椭圆方程$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立，得出根与系数的关系.设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，利用斜率之差验证 $M(x_1,-y_1)$，$F(2,0)$，$Q(x_2,y_2)$三点共线.此处的化简必然出现复杂的结构形式$\frac{y_2}{x_2-2}+\frac{y_1}{x_1-2}$，即

$$\frac{y_2}{\lambda y_2+1}+\frac{y_1}{\lambda y_1+1}=\frac{(\lambda y_1+1)y_2+(\lambda y_2+1)y_1}{(\lambda y_2+1)(\lambda y_1+1)}=\frac{2\lambda y_1y_2+y_1+y_2}{\lambda^2y_1y_2+\lambda(y_1+y_2)+1}.$$

将根与系数的关系代入可得到结论.以上的问题不可避免地需要代入数据进行变形化简，得到结论.由于$F(2,0)$为定点，M，F，Q 三点共线可以用向量共线定理表示，从而简化运算.

解　令$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$，其中 $\lambda>1$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$(x_1-3,y_1)=\lambda(x_2-3,y_2)$，从而有$\begin{cases}x_1-3=\lambda(x_2-3),\\ y_1=\lambda y_2,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1-\lambda x_2=3-3\lambda,\\ y_1=\lambda y_2.\end{cases}$

又 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$在椭圆 C 上，所以

$$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1,\qquad ①$$

$$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1,\qquad ②$$

由①－②×λ^2，得

$$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{6}+\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{2}=1-\lambda^2,$$

则$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{6}=1-\lambda^2$，即 $x_1+\lambda x_2=2(1+\lambda)$.又 $x_1-\lambda x_2=3-3\lambda$，所以 $\lambda x_2=\frac{5\lambda}{2}-\frac{1}{2}$.要证 M，F，Q 三点共线，只要证$\frac{y_1}{2-x_1}=\frac{y_2}{x_2-2}$，又 $y_1=\lambda y_2$，所以只需要证$\frac{\lambda y_2}{2-x_1}=\frac{y_2}{x_2-2}$，即证 $2+2\lambda=x_1+\lambda x_2$，得证.

点评　该方法利用向量共线定理表示直线关系，结合点在椭圆上，通过方程思想得到 x_1，x_2，λ 的线性关系.M，F，Q 三点共线的本质是直线 MQ 过定点 $F(2,0)$，因此，可采用分析法验证 $k_{MF}=k_{QF}$，即可得到结论.此方法减少了运算量，开拓了我们的思路.

例 2　如图 2 所示，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别是 A，B.过点 $E(4,0)$的直线 l 与 C 交于 P，Q 两点，直线 AP 与 BQ 交于点 S，求证：点 S 在

一条定直线上.

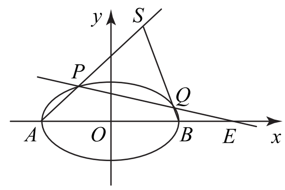

图 2

分析 设过定点 E 的直线方程为 $y=k(x-4)$,将之与椭圆方程联立,得出根与系数的关系.设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立直线 $AP:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ 和 $BQ:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,得

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=$$

$$\frac{k(x_2-4)(x_1+2)}{k(x_1-4)(x_2-2)}=\frac{x_1x_2-4x_1+2x_2-8}{x_1x_2-2x_1-4x_2+8}.$$

有学生把 x 解出,结果形式更加复杂.这里的结果形式很常见,通常将根与系数的关系代入直接求解.探究发现,这是与例 1 类似的问题,即由定点出发产生直线交椭圆于两个动点问题,因此,抓住点 P,Q,E 三点共线这个关键信息,寻找突破点.

解 令 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EQ}$,其中 $\lambda>1$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,而 $E(4,0)$,则

$$(x_1-4,y_1)=\lambda(x_2-4,y_2),$$

所以 $\begin{cases}x_1-4=\lambda(x_2-4),\\ y_1=\lambda y_2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2=4-4\lambda,\\ y_1-\lambda y_2=0.\end{cases}$

又 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上,所以

$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1, \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1, \quad ②$$

由①$-$②$\times\lambda^2$,得

$$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{4}+\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{3}=1-\lambda^2,$$

故 $\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{4}=1-\lambda^2$,即 $x_1+\lambda x_2=1+\lambda$.

又因为 $x_1-\lambda x_2=4-4\lambda$,所以 $x_1=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda$,$\lambda x_2=\frac{5}{2}\lambda-\frac{3}{2}$.因为点 A,P,S 共线且 B,Q,S 共线,设点 $S(m,n)$,所以

$$\frac{n}{m+2}=\frac{y_1}{x_1+2}, \quad ③$$

$$\frac{n}{m-2}=\frac{y_2}{x_2-2}. \quad ④$$

据对称性,直线 AP 与直线 BQ 的交点在定直线 $x=m$ 上,故 $\frac{③}{④}=\frac{\frac{n}{m+2}}{\frac{n}{m-2}}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}$,即

$$\frac{m-2}{m+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{\lambda(x_2-2)}{x_1+2}=-\frac{1}{3},$$

所以 $m=1$,故点 S 在定直线 $x=1$ 上.

点评 本题基于问题特征,避开“非对称”的根与系数的关系,利用三点共线产生的向量关系以及斜率关系简化点 S 的坐标运算,可以收获意想不到的效果.在学习中,我们要能从多元视角分析影响运算的主要因素,探究运算思路,掌握运算法则,突出对运算求解能力的训练,不断渗透数学思想和方法,从而发展“四基”、提高“四能”.

例 3 如图 3 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2.设 A,B 是 C 上位于 x 轴上方的两点,且 $AF_1\parallel BF_2$,AF_2 与 BF_1 交于点 P,求证:PF_1+PF_2 是定值.

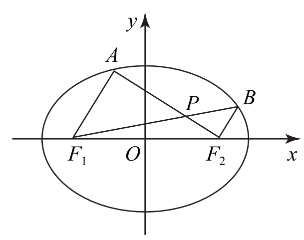

图 3

分析 该题条件特征与前面问题有较大区别,学生思考的着力点不明确,所以无法顺利设出直线方程,以至于无法用根与系数的关系解题.我们可以考虑利用椭圆的定义以及平面几何关系寻找方法,但是难度较大.分析发现该题本质是有过定点的三点共线结构,即 F_1,P,B 共线与 F_2,P,A 共线.又因为 $AF_1\parallel BF_2$,所以利用相似关系串联起动点与定点之间的关系.

解 设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PF_2}$,$\overrightarrow{F_1P}=\lambda\overrightarrow{PB}$,其中 $\lambda>0$,因为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x,y)$,所以 $(x-x_1,y-y_1)=\lambda(1-x,-y)$,所以

$$\begin{cases}x_1=(\lambda+1)x-\lambda,\\ y_1=(\lambda+1)y.\end{cases} \quad ①$$

同理

$$\begin{cases}\lambda x_2=(\lambda+1)x+1,\\ \lambda y_2=(\lambda+1)y.\end{cases} \quad ②$$

由①和②得

$$x_1-\lambda x_2=-\lambda-1,y_1-\lambda y_2=0. \quad ③$$

又 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上,所以

$$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1, \quad ④$$

$$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1. \quad ⑤$$

由④－⑤×λ^2，得

$$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{2}+(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)=(1+\lambda)(1-\lambda),$$

代入式③得 $x_1+\lambda x_2=2(\lambda-1)$，结合式③得 $2x_1=\lambda-3$，再结合式①中 $x_1=(\lambda+1)x-\lambda$，得 $x=\frac{3(\lambda-1)}{2(\lambda+1)}$，即

$$\lambda=\frac{3+2x}{3-2x}. \quad ⑥$$

再由④＋⑤×λ^2，得

$$\frac{[(\lambda+1)x-\lambda]^2}{2}+\frac{[(\lambda+1)x+1]^2}{2}+2[(\lambda+1)y]^2=1+\lambda^2,$$

将式⑥代入得 $\frac{x^2}{\frac{9}{8}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$，从而点 $P(x,y)$ 的轨迹为椭圆，则 $PF_1+PF_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

点评 运用两次三点共线，结合对称性猜想并求出点 $P(x,y)$ 的轨迹，符合学生认知逻辑.高三专题复习要真正做到“专”而有效，围绕一个典型问题进行多题一解或多题归类的教学实施，围绕一条主线进行一些串通的教学组织.

例 4 如图 4 所示，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上有四个动点 A,B,C,D，且 $CD/\!/AB$，AD 与 BC 相交于点 P.若点 P 的坐标为(8,6)，求直线 AB 的斜率.

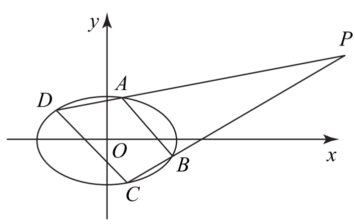

图 4

分析 由定点 P 引出两条直线，且 $AB/\!/CD$，符合三点共线结构特征.然而点 P 不在坐标轴上，给结构变形带来难度，但是只要回归本质，探究出坐标之间的线性关系，利用同构关系依然可以解决问题.

解 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，因为 P,A,D 三点共线，所以 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PA}$，其中 $\lambda>1$，所以 $\begin{cases}y_4-6=\lambda(y_1-6),\\x_4-8=\lambda(x_1-8),\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}\lambda y_1-y_4=6(\lambda-1),\\ \lambda x_1-x_4=8(\lambda-1).\end{cases} \quad ①$$

又因为 $A(x_1,y_1)$，$D(x_4,y_4)$ 在椭圆 E 上，所以

$$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1, \quad ②$$

$$\frac{x_4^2}{16}+\frac{y_4^2}{4}=1, \quad ③$$

由②×λ^2－③，得

$$\frac{(\lambda x_1+x_4)(\lambda x_1-x_4)}{16}+\frac{(\lambda y_1+y_4)(\lambda y_1-y_4)}{4}=\lambda^2-1,$$

把式①代入得

$$\frac{8(\lambda-1)(\lambda x_1+x_4)}{16}+\frac{6(\lambda-1)(\lambda y_1+y_4)}{4}=(\lambda+1)(\lambda-1),$$

化简变形

$$\lambda x_1+x_4+3(\lambda y_1+y_4)=2(\lambda+1). \quad ④$$

式①中两个等式变形相加得

$$\lambda x_1-x_4+3(\lambda y_1-y_4)=26(\lambda-1), \quad ⑤$$

所以④＋⑤得

$$2\lambda x_1+6\lambda y_1=28\lambda-24. \quad ⑥$$

又因为 P,B,C 三点共线，且 $CD/\!/AB$，所以 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PB}$，同理可得

$$2\lambda x_2+6\lambda y_2=28\lambda-24. \quad ⑦$$

因此，由⑥与⑦得 $2\lambda x+6\lambda y=28\lambda-24$，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是方程 $2\lambda x+6\lambda y=28\lambda-24$ 的解，该方程即为直线 AB 的方程.

综上，直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{3}$.

点评 本题的解法很巧妙，依托两次向量共线定理实现结构变形，准确定位问题切入点，巧妙避开根与系数的关系，利用设而不求法解决问题.

章建跃指出，数学教师要教好数学，就要做到“理解数学”“理解学生”“理解教学”.其中“理解数学”是教好数学的前提.“理解数学”即数学教师自己要理解数学问题的本质，知道知识的来龙去脉，乃至于概念形成背后的思想方法.

（完）